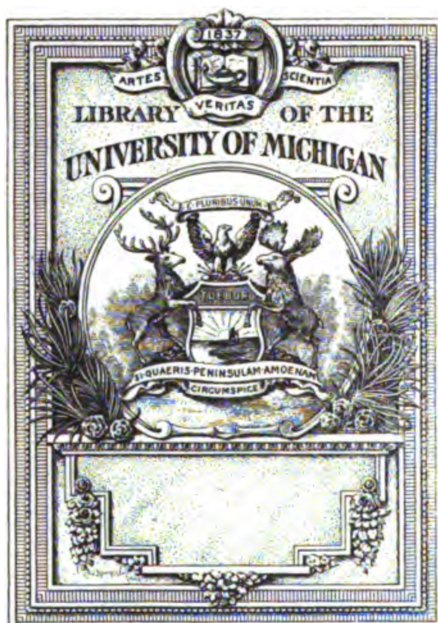

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE







LEÇONS

DE

CINÉMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS
DE
CINÉMATIQUE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

Xavier Paul

Par GABRIEL KŒNIGS

AVEC DES NOTES

Par M. G. DARBOUX
MEMBRE DE L'INSTITUT, DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

ET PAR MM.

E. COSSERAT
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

F. COSSERAT
INGÉNIEUR PRINCIPAL A LA COMPAGNIE DES CHEMINS DE FER DE L'EST

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
8 — rue de la Sorbonne — 8

1897

INTRODUCTION

Ce livre représente, avec les développements que j'ai cru nécessaires, le cours que je professe depuis sept ou huit ans soit à l'École normale, soit à la Faculté des sciences de Paris.

Dans un ordre d'idées où l'analyse et la géométrie ont tour à tour fait leurs preuves, le choix des méthodes pourrait sembler n'être qu'une question d'école. S'il est vrai qu'il se trouve encore des mathématiciens pour bannir systématiquement de leurs écrits, les uns l'analyse, les autres la géométrie, ce système d'exclusion absolue, quels qu'en soient le sens et le caractère, ne m'a pas semblé convenir à un enseignement véritablement scientifique. Malgré les redites auxquelles on s'expose en revenant sur ce lieu commun de la prétendue rivalité entre l'analyse et la géométrie, qui paraît bien plutôt être celle des analystes et des géomètres, faut-il rappeler quelles complications entraîne l'analyse pratiquée sans précautions; combien il est faux de penser qu'elle suffit à tout donner pourvu que l'on s'y abandonne? La méthode géométrique a les avantages de la vue directe et de la rapidité des solutions dans

quelques cas choisis; souvent aussi elle constitue une méthode d'exposition et de synthèse très propre à mettre en relief, après coup, les rapports cachés des choses. Mais ce succès n'est pas assuré. On nous parle des problèmes où elle a réussi; on ne nous dit rien de ceux où elle échoue. En géométrie infinitésimale surtout, où le problème se traduit par une équation différentielle, il faut avoir sous la main une méthode plus sûre, qui, tout en suivant pas à pas les indications de la géométrie, puisse la suppléer à l'instant où elle se dérobe; une méthode où la question des signes des éléments, *si essentielle à la précision,* ne fasse jamais un doute. On ne saurait croire combien ces questions de signes deviennent délicates dans la géométrie livrée à elle-même.

Il fallait donc introduire dans ces questions une méthode ayant la précision et la rigueur de l'analyse, donnant au temps voulu les équations différentielles qui concentrent sur elles et précisent toutes les difficultés du problème et manifestent si souvent des parentés entre des problèmes d'origines très éloignées. Et cependant, cette méthode devait à chaque pas s'inspirer des faits géométriques pour écarter les inconvénients inhérents à l'emploi des coordonnées ordinaires.

L'usage d'un trièdre de référence mobile, choisi de la manière la plus appropriée, offre tous ces avantages. Entre les mains d'Albert Ribaucour et de M. Darboux il est devenu un instrument de découvertes. Il était donc naturel d'introduire cette même idée dans l'exposition de la cinématique et de familiariser ainsi de bonne heure les étudiants avec la méthode la plus sûre et la plus puissante qui soit en géométrie infinitésimale.

Nous n'ignorons pas que la synthèse géométrique se

prête avec une rare élégance à l'exposition des faits les plus essentiels de la cinématique; mais nous estimons qu'un professeur qui se borne à démontrer et à exposer, sans fournir en même temps à ses élèves des moyens pratiques d'investigation, n'a rempli qu'une faible partie de sa tâche. Un enseignement qui se confine dans un cadre fermé et qui se contente de moyens qui n'en sortent pas, ne saurait être un enseignement vraiment scientifique. Or, l'emploi du trièdre mobile constitue une méthode de recherches pouvant atteindre à tout avec autant d'élégance que de sûreté.

On verra que j'ai commencé par développer la théorie abstraite et purement géométrique des segments. Il le fallait bien puisque cette théorie n'a pas encore pénétré dans l'enseignement élémentaire. Quant à la mêler à l'exposition même des faits cinématiques, il y a là le même inconvénient qu'à noyer la cinématique dans la dynamique, ainsi que cela s'est longtemps pratiqué. La tâche du géomètre est, non seulement de découvrir des faits nouveaux, mais encore de classer les vérités acquises et de grouper ensemble les idées d'un même ordre. La théorie des segments appartient à la géométrie; elle trouve en statique et en cinématique deux applications importantes, elle peut en avoir d'autres.

La cinématique tout entière repose sur le théorème de la composition des vitesses et sur l'expression de la vitesse d'entraînement d'un point d'un corps solide en mouvement. J'ai déduit ces faits par l'analyse qui offre, pour les établir, la plus simple et la plus naturelle des méthodes. L'interprétation des formules, faite avec le soin nécessaire, conduit au résultat classique du mouvement hélicoïdal tangent. Plus d'un trouvera cette méthode un peu indirecte, et cependant

n'est-elle pas la plus conforme à la réalité des faits? Ne met-elle pas mieux en lumière ce qu'il y a d'artificiel et de voulu dans cette décomposition du mouvement infiniment petit en rotations autour d'axes conjugués? Ces rotations n'existent pas en réalité, et ce n'est qu'au point de vue des vitesses que *tout se passe comme si elles existaient.* J'ai tenu cependant à exposer aussi les principes de la méthode géométrique directe.

L'emploi du trièdre mobile conduit en quelques lignes aux formules de Bour et au théorème de Coriolis. J'en ai déduit les applications classiques aux courbures dans le mouvement autour d'un point fixe. J'ai, à propos du mouvement d'une figure plane, indiqué les principes d'une méthode propre à faire connaître la forme d'une trajectoire dans le voisinage d'un de ses points.

Dans le mouvement général d'une figure, j'ai insisté plus qu'on ne le fait habituellement sur la question intéressante du roulement des courbes gauches dans l'espace.

Enfin, les déplacements à plusieurs paramètres ont acquis dans ces derniers temps une telle importance que j'ai cru devoir leur consacrer tout un chapitre.

Dans les deux derniers chapitres, j'ai traité avec quelque développement, d'une part, la théorie relativement jeune des systèmes articulés et, d'autre part, la question plus abstraite des rapports qui existent entre les déplacements et l'homographie. J'ai eu ainsi l'occasion d'indiquer, en passant, les liens importants qui rattachent la question des déplacements à la théorie des variables complexes.

Quelques notes terminales sont consacrées à des questions qui ne pouvaient trouver place dans le corps même de l'ouvrage.

Il serait injuste d'oublier ce que l'enseignement de la

cinématique doit à mes vénérés maîtres et prédécesseurs Bouquet, Darboux, Tannery. Ils ont apporté dans l'étude des questions cinématiques cette rigueur et cette précision inséparables de toute véritable science. M. Tannery notamment, par un enseignement de plusieurs années à la Faculté des sciences, a exercé la plus salutaire influence. Il a montré le vrai parti que l'on peut tirer de l'étude des accélérations dans la théorie des courbures, et bien mis en relief ce fait, qu'on paraît trop disposé à perdre de vue, que le temps en cinématique n'est qu'une variable auxiliaire quelconque, en sorte que la cinématique n'est, à proprement parler, que la géométrie du déplacement.

Je me fais un plaisir, en terminant cette introduction, d'adresser mes affectueux remerciements à deux de mes élèves de l'École normale, MM. Cotton et Marijon, qui ont bien voulu m'aider dans la rédaction des premiers chapitres. Mes remerciements aussi à mon excellent ami M. Hermann, qui a apporté à la publication de ce livre un empressement et un soin tout particuliers (¹).

Depuis que ces lignes sont écrites, au cours même de l'impression, je me suis décidé à réserver pour un autre volume les applications de la cinématique. L'étendue même de ces applications, comme aussi celle qu'ont prise les développements purement théoriques qui composent ce volume, m'ont imposé cette détermination.

Je profite de cette circonstance pour adresser mes plus

(¹) Les lignes précédentes reproduisent, à peu de choses près, la préface placée en tête du premier fascicule, paru en 1894 et qui comprenait les dix premiers chapitres.

vifs remerciements à M. Darboux, qui m'a fait l'honneur de me donner trois Notes, dont l'une particulièrement importante et entièrement inédite sur les mouvements algébriques.

MM. Eugène et François Cosserat, qui viennent de publier dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* un travail très étudié sur la mécanique des milieux continus, ont eu l'amabilité de m'en donner un extrait, que l'on trouvera vers la fin de ce volume; je les en remercie bien cordialement.

Kérity, 24 octobre 1896.

LEÇONS

DE

CINÉMATIQUE

LEÇONS

DE

CINÉMATIQUE

PROFESSÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

GABRIEL KŒNIGS

CHARGÉ D'UN COURS DE CINÉMATIQUE A LA SORBONNE,
PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLÈGE DE FRANCE,
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN,
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE,
8 — rue de la Sorbonne — 8

1895

Tétraèdres de Chasles.

La considération des tétraèdres s'est présentée aux premiers auteurs (Charles, Sylvester, Möbius) qui ont écrit sur la théorie des segments.

On a reconnu ensuite que l'emploi du parallélipipède permettait de rattacher cette considération à celle des moments pris par rapport à des axes, dont l'usage est beaucoup plus ancien en mécanique. Les parallélipipèdes ou moments de deux segments permettent donc de réunir dans une même idée générale l'ancienne théorie des moments pris par rapport à des axes, et les propriétés des tétraèdres introduits par Chasles.

Le moment de deux segments donne lieu à quelques propositions élémentaires que nous allons démontrer.

Indifférence au glissement.

Théorème I. — *Le moment de deux segments reste invariable si l'on fait glisser l'un d'eux sur lui-même.*

En effet, soient $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ les deux segments, il suffit de prouver, par exemple, que le glissement de $\overline{CD}$ sur lui-même laisse inaltéré le volume du tétraèdre ABCD ainsi que son signe.

Pour le signe, il est bien clair que le glissement de CD sur lui-même ne change pas la nature (*dextrorsum* ou *sinistrorsum*) de la disposition des deux segments, et pour ce qui est de la valeur absolue du volume, on voit aussi que cette valeur ne change pas. Il suffit de regarder A B C D comme une pyramide de sommet A et de base BCD. Le glissement de CD laisse la hauteur inaltérée, et le triangle de base BCD reste évidemment équivalent à lui-même, puisqu'il conserve sa base et sa hauteur.

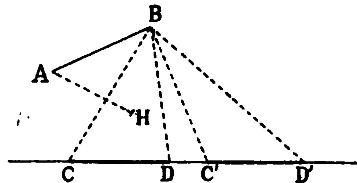


Fig. 1.

Corollaire. — Le moment de deux segments ne change pas si l'on fait glisser arbitrairement chacun d'eux sur lui-même.

Théorème II. — *Soient* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *deux segments,* CX *une perpendiculaire au plan* ABC, *et* $\overline{CD'}$ *la projection de* $\overline{CD}$ *sur cette droite;* on a

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD'}\right).$$

En effet, observons que $\overline{CD}$ et $\overline{CD'}$ sont d'un même côté du plan ABC mené par AB et C, car D' peut s'obtenir en menant par D un plan parallèle au plan ABC et prenant sa trace sur CX; donc la disposition *(dextrorsum* ou *sinistrorsum)* de $\overline{AB}$ et $\overline{CD'}$ est la même que celle de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$. Le signe des deux moments est donc le même. Leur valeur absolue est aussi la même, car les tétraèdres (ABCD) (ABCD'), considérés comme des pyramides de base commune ABC et de sommets D et D', ont même base et même hauteur CD'.

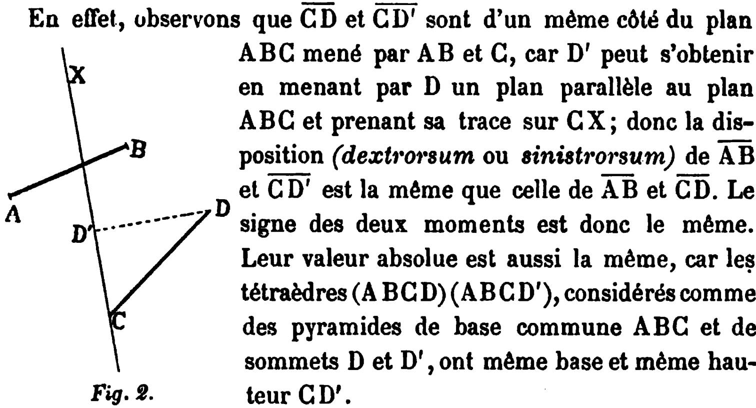


Fig. 2.

Première expression analytique du moment de deux segments.

On peut déduire de là une expression analytique utile du moment de deux segments.

Observons d'abord que la notion de disposition *dextrorsum* ou *sinistrorsum* que nous avons définie pour deux segments s'étend au cas d'un segment et d'un axe et au cas de deux axes.

Cela posé, considérons la droite CX construite précédemment; un sens de parcours de cette droite est *dextrorsum* par rapport à $\overline{AB}$, et l'autre est *sinistrorsum*. Choisissons l'axe *dextrorsum* et soit, pour ne pas compliquer les notations, CX cet axe. Le segment $\overline{CD'}$ est mesuré sur l'axe CX par un nombre σ'; je dis que l'on a

$$\text{moment}\,(\overline{AB}, \overline{CD}) = \text{moment}\,(\overline{AB}, \overline{CD'}) = 2S\sigma',$$

où S désigne l'aire du triangle ABC.

Il suffit de prouver que

$$\text{tétraèdre}\,(\overline{AB}, \overline{CD}) = \text{tétraèdre}\,(\overline{AB}, \overline{CD'}) = \frac{1}{3}S.\sigma'.$$

Cette égalité est vraie en valeur absolue, car la valeur absolue de σ' est précisément la hauteur du tétraèdre. Elle est aussi vraie en signe. Supposons, en effet, σ' positif; il faut prouver que le tétraèdre est alors positif ou que les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD'}$ sont *dextrorsum*.

Or, puisque σ' est positif, $\overline{CD'}$ a le sens de l'axe CX qui est *dextrorsum* par rapport à AB; donc $\overline{CD'}$ est aussi *dextrorsum* par rap-

port à $\overline{AB}$. On verra de même que si σ' est négatif, le tétraèdre doit bien être négatif, car alors $\overline{AB}$ et $\overline{CD'}$ sont *sinistrorsum*.

Première généralisation du théorème de Varignon.

THÉORÈME III. — *Soient $\overline{CD_1}$, $\overline{CD_2}$, ..., $\overline{CD_n}$ n segments concourants* que l'on peut, par glissement, amener à avoir même origine C, *et $\overline{AB}$ un autre segment; construisons le segment $\overline{CD}$, somme géométrique des n premiers segments; la somme des moments des segments $\overline{CD_i}$ et du segment $\overline{AB}$ est égale au moment de $\overline{AB}$ et de la somme géométrique $\overline{CD}$ des n segments.*

Cette extension de la belle proposition due à Varignon se démontre comme il suit :

Choisissons, comme plus haut, l'axe CX normal au plan ABC et *dextrorsum* avec $\overline{AB}$; soient $\overline{CD'_1}$, $\overline{CD'_2}$, ..., $\overline{CD'_n}$ et $\overline{CD'}$ les projections sur CX des segments $\overline{CD_1}$, $\overline{CD_2}$, ..., $\overline{CD_n}$, $\overline{CD}$; et σ'_1, σ'_2, ..., σ'_n, σ' les nombres qui mesurent ces projections; on a, par le théorème des projections :

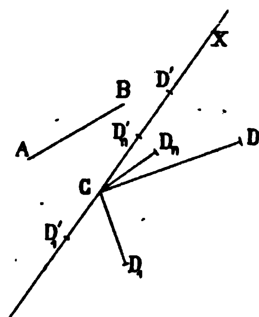


Fig. 3.

$$\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \dots + \sigma'_n.$$

Multiplions par $\frac{1}{3}$ S où S est l'aire du triangle ABC, on aura

$$\frac{1}{3} S\, \sigma' = \frac{1}{3} S\, \sigma'_1 + \frac{1}{3} S\, \sigma'_2 + \dots + \frac{1}{3} S\, \sigma'_n.$$

Mais $\frac{1}{3} S\, \sigma'_i$ est le tétraèdre construit sur les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD_i}$; $\frac{1}{3} S\, \sigma'$ est le tétraèdre construit sur $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$; on a donc

$$\begin{aligned} \text{tétraèdre}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = & \ \text{tétraèdre}\left(\overline{AB}, \overline{CD_1}\right) \\ & + \text{tétraèdre}\left(\overline{AB}, \overline{CD_2}\right) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \text{tétraèdre}\left(\overline{AB}, \overline{CD_n}\right). \end{aligned}$$

En multipliant par 6 les deux membres de cette égalité, on a le théorème énoncé.

Seconde expression du moment de deux segments.

Soient deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, par glissement on peut amener les origines A, C des deux segments aux pieds de la perpendiculaire commune aux droites AB, CD, qui les portent, de sorte que AC est

cette perpendiculaire commune. Soit p sa longueur. Élevons, comme dans le théorème II, la perpendiculaire CX au plan ABC et projetons $\overline{CD}$ en $\overline{CD'}$ sur CX. On a, d'après le théorème II,

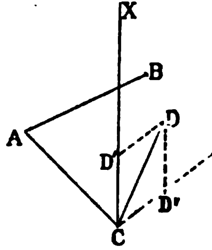


Fig. 4.

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD'}\right).$$

Or, le moment de $\overline{AB}$ et de $\overline{CD'}$ est aisé à calculer en valeur absolue. Nous avons, en effet,

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm\, 2\, ABC \times CD';$$

or, l'aire du triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{2}\, AB.p,$$

donc

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm\, p\, AB.CD'.$$

Soit CD'' la projection de CD sur le plan ABC; la droite CD'' est parallèle à la droite AB et est la trace sur le plan ABC du plan XCD; appelons α l'angle aigu de CD et de CD''; l'angle DCD' est le complément de l'angle DCD'' ou α, et l'on a

$$CD' = CD.\sin\alpha,$$

donc, enfin,

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm\, p \sin\alpha . AB.CD.$$

Deux droites étant données dans l'espace, leur angle est indéterminé, comme on sait, mais le sinus de leur angle a deux valeurs qui sont égales et de signes contraires. Nous appellerons sinus de l'angle de deux droites celui de ces deux sinus qui est positif [1].

On peut alors énoncer ce théorème :

THÉORÈME IV. — *La valeur absolue du moment de deux segments est égale au produit de leurs deux longueurs, multiplié par leur plus courte distance et par le sinus de l'angle des droites qui les portent.*

---

[1] La même remarque s'étend aux cas de deux axes. Le cosinus de l'angle de deux axes est déterminé, mais non le sinus qui a deux valeurs égales et de signes contraires.

Ce théorème a par lui-même une certaine portée pratique, mais on peut lui donner une forme plus précise en introduisant les moments pris par rapport aux axes.

6. Faisons en premier lieu la remarque que le glissement d'un segment sur lui-même est sans importance au point de vue des moments, des projections, et du nombre qui mesure le segment; nous sommes ainsi amenés à regarder comme identiques deux segments $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ tels que l'on passe de $\overline{AB}$ à $\overline{A_1B_1}$ par un glissement de $\overline{AB}$ sur lui-même. Cette indétermination est déjà moins grande que celle qui résulte de la considération des segments équipollents. Disons dès à présent que cette indétermination due au glissement cadre exactement avec les applications mécaniques de la théorie des segments.

Segment unitaire attaché à un axe.

Considérons un axe Δ; il y a sur cet axe un segment remarquable, le segment unitaire (de longueur 1) qui a le même sens que Δ, c'est-à-dire le segment qui est mesuré par le nombre $+1$. Réciproquement, tout segment unitaire définit sans ambiguïté l'axe qui le porte et qui a même sens que lui. Cette remarque permet, en quelque sorte, de confondre les notions d'axe et de segment unitaire.

Moment par rapport à un axe.

Conformément à cette manière de voir, nous appellerons *moment d'un segment* $\overline{AB}$ *par rapport à un axe* Δ, le moment de $\overline{AB}$ et du segment unitaire attaché à l'axe Δ.

Moment de deux axes.

Le moment de deux axes sera le moment de leurs deux segments unitaires.

Définition classique des moments par rapport à un axe.

La définition que nous avons donnée des moments par rapport à un axe, sort un peu des traditions classiques; il est bien facile de la ramener à la définition habituelle.

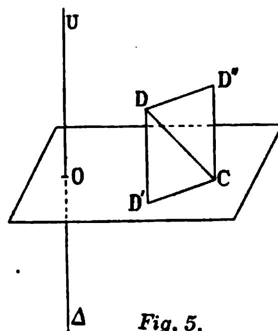


Fig. 5.

Soit OU le segment unitaire attaché à un axe, et CD un segment. Prenons le point O (ce qui est permis par glissement), au point où l'axe Δ est coupé par le plan π, normal à Δ mené par C.

Projetons D en D' sur le plan π et en D'' sur une parallèle à Δ issue de C. On peut regarder $\overline{CD}$ comme la somme géométrique de $\overline{CD'}$ et de $\overline{CD''}$.

On a donc, d'après le théorème III,

$$\text{moment}\left(\Delta, \overline{CD}\right) = \text{moment}\left(\overline{OU}, \overline{CD}\right)$$
$$= \text{moment}\left(\overline{OU}, \overline{CD'}\right) + \text{moment}\left(\overline{OU}, \overline{CD''}\right).$$

Du reste, puisque $\overline{CD''}$ est parallèle à $\overline{OU}$, le second moment est nul et il reste

$$\text{moment}\left(\Delta, \overline{CD}\right) = \text{moment}\left(\overline{OU}, \overline{CD'}\right).$$

Soit p la distance du point O à la droite CD′, on a

$$\text{moment}\left(\overline{OU}, \overline{CD'}\right) = 6 \text{ tétraèdre}\left(\overline{OU}, \overline{CD'}\right)$$
$$= \pm 6 \times \frac{1}{3} OU \times \frac{1}{2} p.CD'$$
$$= \pm p.CD',$$

le signe + convenant au cas où CD′ va de gauche à droite pour un observateur traversé des pieds à la tête par $\overline{OU}$, et le signe — dans le cas contraire.

C'est bien là la définition adoptée ordinairement pour le moment d'un segment par rapport à un axe.

On voit que par le fait de la réduction à l'unité du segment $\overline{OU}$, le moment qui a été défini au début comme un volume, se trouve, pour le cas d'un axe et d'un segment, représenter une aire douée d'un signe.

En supposant, dans le théorème III, que le segment $\overline{AB}$ est unitaire et que les segments $\overline{CD}_1, \ldots, \overline{CD}_n$ sont dans un plan normal à $\overline{AB}$, le théorème III devient en fait le théorème dit de Varignon.

Revenons au théorème IV, qui nous donne pour le moment de deux segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ l'expression

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm p \sin \alpha . AB . CD.$$

Si $\overline{AB}$ est un segment unitaire attaché à un axe Δ, nous avons

$$\text{moment}\left(\Delta, \overline{CD}\right) = \pm p \sin \alpha . CD.$$

Si enfin $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sont tous deux unitaires, et sont attachés à deux axes Δ′, Δ

$$\text{moment}\left(\Delta, \Delta'\right) = \pm p \sin \alpha.$$

Autrement dit, *le moment de deux axes est égal, au signe près, au produit de leur plus courte distance par le sinus de leur angle.*

Formule générale relative au moment de deux segments.

Nous sommes actuellement à même de donner une expression analytique précise du moment de deux segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Soient en effet Δ, Δ' deux axes qui portent ces segments, et désignons par σ, σ' les nombres qui mesurent $\overline{AB}$ sur Δ, et $\overline{CD}$ sur Δ'; je dis que l'on a

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \sigma.\sigma'.\text{moment}\,(\Delta, \Delta').$$

Observons d'abord que dans l'équation

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm\, p \sin \alpha . AB . CD,$$

$p \sin \alpha$ est, au signe près, moment (Δ, Δ'), et que AB, CD sont les valeurs absolues de σ, σ'. On peut donc écrire

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = \pm\, \sigma.\sigma' \text{ moment}\,(\Delta, \Delta').$$

Prouvons que le signe + convient seul dans tous les cas :

Si σ, σ' sont positifs, c'est que $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ont le sens des axes Δ, Δ'. Donc $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ont même disposition que Δ, Δ' et le moment de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ a même signe que celui de Δ, Δ'. On a donc, dans ce cas,

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = +\, \sigma.\sigma' \text{ moment}\,(\Delta, \Delta').$$

Que σ devienne négatif, alors $\overline{AB}$ est de sens contraire à Δ, et $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, seront de disposition contraire à Δ, Δ'. Le moment de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sera de signe contraire à celui de Δ, Δ'. Puisque σ est négatif, le signe + convient encore. On poursuivra sans peine le raisonnement dans le cas où σ, σ' deviendraient tous deux négatifs.

La formule est donc démontrée. Il est bon de constater que la formule est encore vraie si l'un des segments est de longueur nulle, ou bien s'ils sont dans un même plan.

En particulier, soit un axe Δ et un segment $\overline{CD}$ porté par un axe Δ' et mesuré sur cet axe par le nombre σ', on aura (1)

$$\text{moment}\left(\Delta, \overline{CD}\right) = \text{moment}\,(\Delta, \Delta').\sigma'.$$

---

(1) On démontrerait de même que si l'on a deux segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ce dernier porté par un axe Δ', et y ayant pour mesure le nombre σ', on a

$$\text{moment}\,(\overline{AB}, \overline{CD}) = \text{moment}\,(\overline{AB}, \Delta').\sigma'.$$

Cette formule sera utilisée dans la suite.

Si l'on voulait projeter ce segment $\overline{CD}$ sur l'axe Δ, en désignant par $\mathfrak{L}(\Delta, \Delta')$ le paramètre de projection de Δ' sur l'axe Δ, on aurait l'expression suivante du nombre qui mesure cette projection :

$$\text{project.}\left(\Delta, \overline{CD}\right) = \mathfrak{L}(\Delta, \Delta').\sigma'.$$

Le rapprochement de ces deux formules tend à établir une certaine analogie entre le paramètre de projection et le moment de deux axes. En se plaçant au point de vue projectif, on établit en effet que le paramètre de projection n'est qu'un moment d'une certaine nature. On pourra consulter à ce sujet un Mémoire de M. Lindemann inséré dans les *Mathematische Annalen*.

Expression analytique des moments d'un segment.

7. Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$, tel qu'une rotation de 90° de gauche à droite, pour un observateur traversé des pieds à la tête par l'axe Oz, amène l'axe Ox sur l'axe Oy.

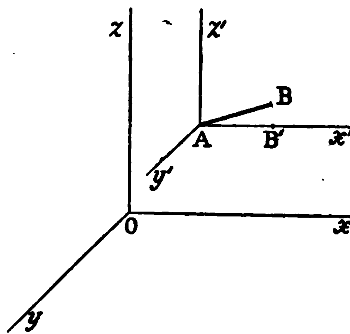


Fig. 6.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point A origine d'un segment $\overline{AB}$, et X, Y, Z les nombres qui mesurent les projections sur Ox, Oy, Oz de ce segment $\overline{AB}$, ou, comme nous le dirons désormais, les *projections de* $\overline{AB}$ *sur les axes de coordonnées*. Cherchons à calculer les moments de $\overline{AB}$ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. J'appelle L, M, N ces moments. On a

$$\begin{aligned} L &= \text{moment}\left(Ox, \overline{AB}\right) \\ &= \text{moment}\left(Ox, \overline{AB'}\right) + \text{moment}\left(Ox, \overline{AB''}\right) + \text{moment}\left(Ox, \overline{AB'''}\right), \end{aligned}$$

où $\overline{AB'}$, $\overline{AB''}$, $\overline{AB'''}$ sont les projections de $\overline{AB}$ sur les axes, Ax', Ay', Az' menés par A parallèles à Ox, Oy, Oz.

On observe d'abord que le moment de $\overline{AB'}$ est nul puisque $\overline{AB'}$ est parallèle à Ox. On peut appliquer au moment de $\overline{AB''}$ la formule trouvée plus haut, en observant que Y est le nombre qui mesure $\overline{AB''}$ sur Ay', on a dès lors

$$\text{moment}\left(Ox, \overline{AB''}\right) = \text{moment}\,(Ox, Ay').Y.$$

De même

$$\text{moment}\left(Ox, \overline{AB'''}\right) = \text{moment}\,(Ox, Az').Z.$$

La plus courte distance de Ox et de Ay' est la valeur absolue de z, et comme Ox, Ay' sont rectangulaires, le sinus positif de leur angle est égal à 1; on a donc,

$$\text{moment}\,(Ox, Ay') = \pm \text{ valeur absolue } z,$$

ou encore

$$= \pm z.$$

Or, si z est positif, Ay' étant au-dessus de Ox, est *sinistrorsum* par rapport à Ox, on a donc dans ce cas

$$\text{moment}\,(Ox, Ay') = -z;$$

si z est négatif, Ay' est au-dessous de Ox, et est *dextrorsum* par rapport à Ox, le moment doit être positif; on a encore la même formule.

On verra par le même procédé que, dans tous les cas,

$$\text{moment}\,(Ox, Az') = +y,$$

on a donc enfin

$$L = \text{moment}\left(Ox, \overline{AB}\right) = yZ - zY;$$

on trouve, d'une manière analogue,

$$M = \text{moment}\left(Oy, \overline{AB}\right) = zX - xZ,$$
$$N = \text{moment}\left(Oz, \overline{AB}\right) = xY - yX.$$

On observera que ces quantités X, Y, Z, L, M, N ne sont pas indépendantes et qu'elles sont liées par l'équation

$$(1) \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

Supposons réciproquement que l'on se donne les projections d'un segment X, Y, Z, ainsi que ses moments L, M, N, et cherchons à déterminer ce segment. Il suffira pour cela d'en connaître l'origine A, car X, Y, Z étant connus, sa direction et sa longueur sont déterminées. Désignons par x, y, z les coordonnées inconnues du point A.

x, y, z doivent vérifier les trois équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} = \mathrm{L} - \mathrm{Z}y + \mathrm{Y}z = 0, \\ \mathcal{Y} = \mathrm{M} - \mathrm{X}z + \mathrm{Z}x = 0, \\ \mathcal{Z} = \mathrm{N} - \mathrm{Y}x + \mathrm{X}y = 0, \end{array} \right.$$

mais ces équations sont indéterminées. On a en effet en vertu de l'équation (1), l'identité

$$(3) \qquad \mathrm{X}\mathcal{X} + \mathrm{Y}\mathcal{Y} + \mathrm{Z}\mathcal{Z} = 0.$$

Les trois quantités X, Y, Z ne peuvent être nulles à la fois, sans quoi nous n'aurions plus de segment. Soit $\mathrm{Z} \gtrless 0$, il suffira d'avoir

$$\mathcal{X} = 0, \quad \mathcal{Y} = 0$$

pour que le système (2) soit vérifié, car l'équation (3) donne alors $\mathcal{Z} = 0$.

Nous trouvons donc que le point A est seulement assujetti à décrire une droite dont les équations sont $\mathcal{X} = 0$, $\mathcal{Y} = 0$. Il est facile de se rendre compte de la position de cette droite; elle est en effet parallèle à la direction même du segment, direction que déterminent complètement X, Y, Z. Cette droite est donc la droite même qui porte le segment cherché, et l'indétermination du point A sur cette droite correspond à la faculté qu'a le segment $\overline{\mathrm{AB}}$ de glisser sur lui-même sans que X, Y, Z, L, M, N soient altérés.

On peut donc énoncer ce théorème :

Étant données six quantités X, Y, Z, L, M, N *liées par l'équation*

$$\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ} = 0,$$

elles définissent un segment dans l'espace (à un glissement près de ce segment sur lui-même).

Coordonnées d'un segment.

Nous appellerons ces quantités les *coordonnées du segment*.

Calcul du moment de deux segments en fonction de leurs coordonnées.

8. Comme application des théorèmes précédents nous allons résoudre ce problème :

Étant donnés deux segments dont les cordonnées sont

$$\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},\ \mathrm{L},\ \mathrm{M},\ \mathrm{N}$$
$$\mathrm{X}',\mathrm{Y}',\mathrm{Z}',\ \mathrm{L}',\mathrm{M}',\mathrm{N}'$$

trouver leur moment.

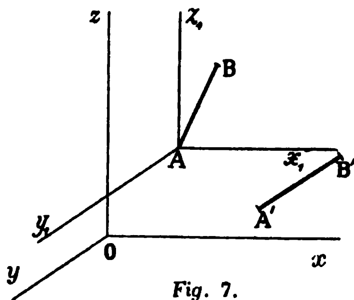


Fig. 7.

Désignons par $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}}$ ces deux segments; menons par A les axes

Ax_1, Ay_1, Az_1, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et soient $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, $\overline{AB_3}$ les projections de $\overline{AB}$ sur ces trois axes. On aura, d'après le théorème III,

$$\begin{aligned}\text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB}\right) = &\ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_1}\right)\\ &+ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_2}\right)\\ &+ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_3}\right)\end{aligned}$$

or, le segment $\overline{AB_1}$ est porté par l'axe Ax_1 et a pour mesure sur cet axe le nombre X ; on a donc

$$\text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_1}\right) = \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{Ax_1}\right).\,X$$

et de même

$$\begin{aligned}\text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_2}\right) &= \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{Ay_1}\right).\,Y,\\ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{AB_3}\right) &= \text{moment}\left(\overline{A'B'}, \overline{Az_1}\right).\,Z.\end{aligned}$$

Mais les coordonnées du point A étant x, y, z, celles de A' étant x', y', z', par rapport au trièdre Ox, Oy, Oz, les coordonnées de A' par rapport au trièdre Ax_1 Ay_1 Az_1 sont

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z,$$

et par suite, en vertu des formules qui donnent L, M, N, nous aurons

$$\begin{aligned}\text{moment}\left(\overline{A'B'}, Ax_1\right) &= (y' - y)\,Z' - (z' - z)\,Y',\\ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, Ay_1\right) &= (z' - z)\,X' - (x' - x)\,Z',\\ \text{moment}\left(\overline{A'B'}, Az_1\right) &= (x' - x)\,Y' - (y' - y)\,X',\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{A'B'}\right) = &\ X\,[(y' - y)\,Z' - (z' - z)\,Y']\\ &+ Y\,[(z' - z)\,X' - (x' - x)\,Z']\\ &+ Z\,[(x' - x)\,Y' - (y' - y)\,X'];\end{aligned}$$

mais on a

$$L' = y'Z' - z'Y', \quad M' = z'X' - x'Z', \quad N' = x'Y' - y'X',$$

donc

$$\begin{aligned}\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{A'B'}\right) = &\ X\,[L' - yZ' + zY']\\ &+ Y\,[M' - zX' + xZ']\\ &+ Z\,[N' - xY' + yX']\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\text{moment}\,(\overline{AB},\ \overline{A'B'}) = {} & L'X + M'Y + N'Z \\ & + X'(yZ - zY) \\ & + Y'(zX - xZ) \\ & + Z'(xY - yX)\end{aligned}$$

et comme

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX,$$

on a finalement

$$\text{moment}\,(\overline{AB},\ \overline{A'B'}) = L'X + M'Y + N'Z + X'L + Y'M + Z'N.$$

Cas des axes. Nous avons assimilé les axes à des segments unitaires. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ les coordonnées d'un segment unitaire; on a

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\ \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu &= 0,\end{aligned}$$

ces six quantités seront pour nous les coordonnées de l'axe qui porte le segment unitaire et a même sens que lui; on voit que α, β, γ sont les cosinus directeurs de l'axe et λ, μ, ν ses moments par rapport à Ox, Oy, Oz.

D'après la définition que nous avons donnée du moment d'un segment $\overline{AB}$ par rapport à un axe,

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \alpha L + \beta M + \gamma N$$

est la valeur du moment du segment $\overline{AB}$ (X, Y, Z, L, M, N) par rapport à l'axe (α, β, γ, λ, μ, ν).

De même le moment de deux axes

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) \ (\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu', \nu')$$

a pour expression

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' + \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'.$$

Moment par rapport à un point. 9. La mécanique n'utilise pas seulement les moments par rapport aux axes; elle emploie aussi les moments par rapport aux points.

Soient $\overline{AB}$ un segment et O un point, élevons au point O une perpendiculaire au plan ABO et choisissons sur cette droite l'axe Δ qui est *dextrorsum* par rapport à $\overline{AB}$. Le moment de $\overline{AB}$ par rapport

à cet axe est ce que l'on appelle le moment du segment $\overline{AB}$ par rapport au point O.

Représentation d'un moment par un segment.

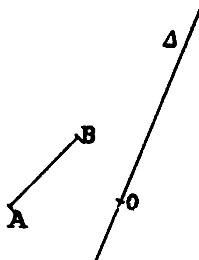


Fig. 8.

Il y a lieu d'introduire ici une représentation des moments qui est due à Cauchy. Soit μ le moment d'un segment $\overline{AB}$ par rapport à un axe quelconque Δ, on représente ce moment par un segment de glissement porté par l'axe Δ, égal en longueur à la valeur absolue de μ, et dirigé dans le sens de l'axe ou le sens opposé suivant que μ est positif ou négatif. En un mot, μ est le nombre qui, sur l'axe Δ, mesure le segment représentatif du moment.

Cette représentation des moments par des segments ne respecte pas les règles de l'homogénéité, mais cela est sans inconvénient, car nous n'aurons jamais à composer des segments purs avec ceux qui représentent les moments.

Considérons un segment $\overline{AB}$, un point O, l'axe Δ_0 normal en O au plan ABO et *dextrorsum* avec $\overline{AB}$; nous avons dit que le moment de $\overline{AB}$ par rapport à cet axe est le moment de $\overline{AB}$ par rapport au point O. Puisque Δ_0 est *dextrorsum* avec $\overline{AB}$, ce moment est toujours positif et le segment $\overline{OG_0}$ qui représente ce moment sur l'axe Δ_0 a le sens même de Δ_0, il est lui aussi *dextrorsum* avec $\overline{AB}$.

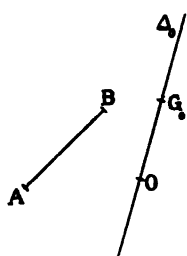


Fig. 9.

Ceci posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Le segment qui représente le moment d'un segment $\overline{AB}$ par rapport à un axe Δ peut se construire en projetant sur Δ le segment qui représente le moment de $\overline{AB}$ par rapport à un point O pris sur Δ.*

Prenons le point O pour origine des coordonnées et Δ pour axe Ox, soient x, y, z les coordonnées du point A, origine du segment $\overline{AB}$, X, Y, Z les projections de ce segment, L, M, N ses moments par rapport à Ox, Oy, Oz.

On a, comme on l'a vu précédemment :

$$\left\{\begin{array}{l} L - Zy + Yz = 0, \\ M - Xz + Zx = 0, \\ N - Yx + Xy = 0, \end{array}\right.$$

et L, M, N, X, Y, Z, étant données, le lieu du point x, y, z est la droite AB.

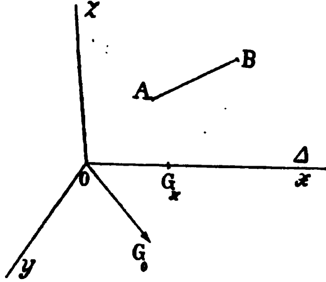


Fig. 10.

En formant une combinaison linéaire et homogène de ces équations, nous aurons l'équation du plan mené par AB et l'origine O; nous trouvons ainsi

$$Lx + My + Nz = 0,$$

Les cosinus directeurs de l'axe Δ_0 normal en O au plan AOB sont

$$\alpha = \frac{\varepsilon L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \beta = \frac{\varepsilon M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

où ε désigne ± 1. Cherchons le signe qui convient. Le moment de $\overline{AB}$ par rapport à cet axe aura pour expression

$$\alpha L + \beta M + \gamma M = \varepsilon \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \varepsilon \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

il doit être positif, puisque Δ_0 est choisi *dextrorsum* avec $\overline{AB}$, donc $\varepsilon = +1$; et, par suite,

$$\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \beta = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

de plus la longueur du segment $\overline{OG_0}$ qui représente le moment par rapport au point O (ou par rapport à Δ_0) est $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, donc

$$L = \alpha \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

représente le nombre qui mesure la projection $\overline{OG_x}$ sur Ox (ou Δ) du segment $\overline{OG_0}$.

Mais L est aussi le moment de $\overline{AB}$ par rapport à Ox (ou Δ); le théorème est donc démontré.

On voit que L, M, N sont les projections du segment $\overline{OG_0}$ sur les axes Ox, Oy, Oz.

Le théorème que nous venons de démontrer joue en cinématique un rôle très important, comme nous le verrons.

Calcul d'un moment par rapport à un point.

Cherchons à résoudre le problème suivant :

Un segment X, Y, Z, L, M, N étant donné, ainsi qu'un point P (x_0, y_0, z_0), trouver le moment du segment par rapport à ce point.

Il suffit de trouver les projections de ce segment moment sur les axes Ox, Oy, Oz ou encore sur les trois axes Px', Py', Pz' parallèles à Ox, Oy, Oz et issus du point P, c'est-à-dire encore les moments du segment proposé par rapport aux axes Px', Py' Pz'. Soient x, y, z les coordonnées du point A origine du segment $\overline{AB}$ par rapport au trièdre Ox, Oy, Oz. Les coordonnées par rapport au trièdre Px' Py' Pz' sont

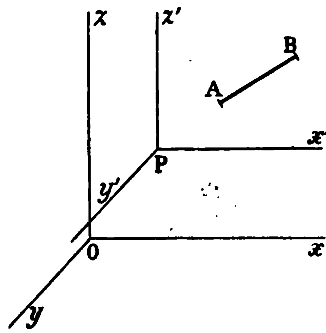


Fig. 11.

$$x - x_0, y - y_0, z - z_0,$$

ses moments par rapport aux axes Px', Py', Pz' sont donc

$$\begin{aligned}
&(y - y_0) Z - (z - z_0) Y,\\
&(z - z_0) X - (x - x_0) Z,\\
&(x - x_0) Y - (y - y_0) X,
\end{aligned}$$

ou encore, eu égard aux expressions de L, M, N,

$$\begin{aligned}
&L + Yz_0 - Zy_0,\\
&M + Zx_0 - Xz_0,\\
&N + Xy_0 - Yx_0.
\end{aligned}$$

Telles sont les formules qui donnent les projections sur les axes Ox, Oy, Oz du segment moment du segment $\overline{AB}$ (X, Y, Z, L, M, N) par rapport au point O (x_0, y_0, z_0). Ces formules sont essentielles.

Autre généralisation du théorème de Varignon.

Le théorème de Varignon est susceptible d'une généralisation importante au moyen des moments pris par rapport à un point. Voici cette généralisation :

Soient plusieurs segments concourants $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ..., $\overline{AB_n}$ *et* $\overline{PG_1}$, $\overline{PG_2}$, ..., $\overline{PG_n}$ *les segments qui représentent leurs moments par rapport à un point* P *arbitraire; le moment* $\overline{PG}$ *de la résultante* $\overline{AB}$ *des segments proposés est la résultante des segments moments* $\overline{PG_1}$, $\overline{PG_2}$, ..., PG_n.

Plaçons en effet l'origine des coordonnées au point A; les moments L_i, M_i, N_i du segment $\overline{AB_i}$ par rapport aux axes sont nuls, et le moment de ce segment relatif au point P (x_0, y_0, z_0) a pour projections

$$\begin{gathered} Y_i z_0 - Z_i y_0, \\ Z_i x_0 - X_i z_0, \\ X_i y_0 - Y_i x_0. \end{gathered}$$

Donc, la somme géométrique de tous ces segments moments aura pour projections les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \sum (Y_i z_0 - Z_i y_0) &= (\Sigma Y_i)\, z_0 - (\Sigma Z_i)\, y_0, \\ \sum (Z_i x_0 - X_i z_0) &= (\Sigma Z_i)\, x_0 - (\Sigma X_i)\, z_0, \\ \sum (X_i y_0 - Y_i x_0) &= (\Sigma X_i)\, y_0 - (\Sigma Y_i)\, x_0. \end{aligned}$$

Or, si X, Y, Z sont les projections du segment $\overline{AB}$, résultante des segments proposés, on a

$$X = \sum X_i, \qquad Y = \sum Y_i, \qquad Z = \sum Z_i,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum (Y_i z_0 - Z_i y_0) &= Y z_0 - Z y_0, \\ \sum (Z_i x_0 - X_i z_0) &= Z x_0 - X z_0, \\ \sum (X_i y_0 - Y_i x_0) &= X y_0 - Y x_0, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

On peut donner de ce théorème une démonstration géométrique qui n'est que l'énoncé en termes géométriques des transformations analytiques que nous venons d'effectuer.

Systèmes de segments. — Couples.

Moment résultant relatif à un segment donné.

10. Considérons plusieurs segments dans l'espace, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ..., $\overline{S_n}$, et un segment arbitraire $\overline{S'}$; on appelle *moment résultant* du système des segments $\overline{S_i}$ par rapport au segment $\overline{S'}$ la somme algébrique des moments des segments $\overline{S_i}$ et du segment $\overline{S'}$. Ce moment résultant est donc un nombre.

Moment résultant par rapport à un axe. — Notion algébrique.

Si le segment $\overline{S'}$ est unitaire, il symbolise un axe Δ, et le moment résultant du système des segments $\overline{S_i}$ par rapport à l'axe Δ est la somme algébrique des moments de tous les segments $\overline{S_i}$ par rapport à Δ; si l'on désigne par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ces moments, le moment résultant μ est défini par l'équation

$$\mu = \sum \mu_i,$$

c'est un nombre. Mais la représentation, due à Cauchy, des moments par des segments, permet de concevoir d'une autre manière le moment résultant d'un système de segments par rapport à un axe.

Notion géométrique.

Considérons, en effet, le moment du segment $\overline{S_i}$ par rapport à l'axe Δ, on peut représenter ce moment par un segment $\overline{G_i}$ porté par Δ, et ce segment $\overline{G_i}$ est mesuré sur l'axe Δ par le nombre μ_i. Faisons alors la somme géométrique de tous ces segments G_i portés par Δ, soit $\overline{G}$ le segment ainsi obtenu; ce segment $\overline{G}$ nous représentera le moment résultant du système des segments par rapport à Δ.

Cette notion purement géométrique concorde du reste avec la notion algébrique du moment résultant μ, car le nombre μ est précisément celui qui mesure le segment $\overline{G}$ sur l'axe Δ.

Nous savons, en effet, que si un segment $\overline{G}$ est la somme géométrique de plusieurs autres $\overline{G_i}$ portés par un même axe, le nombre μ qui mesure $\overline{G}$ est la somme algébrique des nombres μ_i qui mesurent les segments $\overline{G_i}$.

Moment résultant en un point.

Prenons maintenant un point P; le moment résultant du système des segments $\overline{S_i}$ par rapport au point P sera le segment résultant des segments qui représentent les moments des segments proposés par rapport au point P.

Théorème fondamental.

On peut, au sujet de ce moment résultant, établir la proposition suivante qui généralise le théorème V du n° 9 :

THÉORÈME VI. — *Soient un axe Δ issu d'un point O et $\overline{OG}$ le moment résultant d'un système de segments par rapport au point O; la projection $\overline{OG'}$ du segment $\overline{OG}$ sur Δ est le moment résultant du système par rapport à l'axe Δ.*

Soient, en effet, $\overline{OG_i}$ le moment du segment $\overline{S_i}$ par rapport au point O, et $\overline{OG'_i}$ sa projection sur Δ; cette projection $\overline{OG'_i}$ est le moment de $\overline{S_i}$ par rapport à Δ; la somme géométrique $\overline{OG'}$ des segments $\overline{OG'_i}$ figure donc le moment résultant des segments par rapport à l'axe; mais

cette somme géométrique $\overline{OG'}$ est évidemment la projection de la résultante $\overline{OG}$ des segments $\overline{OG_i}$; le théorème est donc démontré.

Corollaire. On déduira de là le corollaire suivant : soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; les moments résultants d'un système de segments par rapport à ces axes se représentent par trois segments qui sont les projections sur ces axes du moment résultant relatif à l'origine O.

Systèmes équivalents. **11.** Soient plusieurs segments $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \ldots, \overline{S_n}$; si par voie de glissement sur eux-mêmes, ou par composition ou décomposition suivant les règles de l'addition géométrique, on transforme ces segments en d'autres $\overline{S'_1}, \overline{S'_2}, \ldots, \overline{S'_{n'}}$, le moment résultant du système relatif à un axe ou à un point quelconque de l'espace ne sera pas altéré; cela résulte du théorème III du n° 5.

De là une notion importante, celle des *systèmes équivalents*. Nous dirons que deux systèmes de segments Σ, Σ' sont équivalents s'ils ont le même moment résultant par rapport à tout axe de l'espace.

Coordonnées d'un système de segments. Soient $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \ldots, \overline{S_n}$ les segments qui composent le premier système de segments et X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i les coordonnées du segment $\overline{S_i}$; le moment de $\overline{S_i}$ par rapport à l'axe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ a pour expression

$$\lambda X_i + \mu Y_i + \nu Z_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i,$$

d'où l'expression suivante du moment résultant relatif à l'axe proposé,

$$\begin{aligned}\sum (\lambda X_i + \mu Y_i + \nu Z_i + \alpha L_i + \beta M_i + \gamma N_i)\\ &= \lambda \Sigma X_i + \mu \Sigma Y_i + \nu \Sigma Z_i + \alpha \Sigma L_i + \beta \Sigma M_i + \gamma \Sigma N_i,\\ &= \mathfrak{X}\lambda + \mathfrak{Y}\mu + \mathfrak{Z}\nu + \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{N}\gamma,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \Sigma X_i, & \mathfrak{Y} &= \Sigma Y_i, & \mathfrak{Z} &= \Sigma Z_i,\\ \mathfrak{L} &= \Sigma L_i, & \mathfrak{M} &= \Sigma M_i, & \mathfrak{N} &= \Sigma N_i.\end{aligned}$$

Ces quantités $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont ce que l'on appelle les *coordonnées du système de segments* Σ.

On voit que $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont les moments résultants relatifs aux axes Ox, Oy, Oz, et que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont les projections de la résultante de translation de tous les segments considérés.

Cela posé, considérons un système Σ', de coordonnées $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, équivalent au système Σ. Les moments des deux systèmes devant être les mêmes relativement à tout axe de l'espace, on a d'abord pour Ox, Oy, Oz

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}, \quad \mathcal{M}' = \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}' = \mathcal{N},$$

et l'équation qui traduit l'égalité des moments pour un axe quelconque (α, β, γ, λ, μ, ν,)

$$\mathcal{X}\lambda + \mathcal{Y}\mu + \mathcal{Z}\nu + \mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma$$
$$= \mathcal{X}'\lambda + \mathcal{Y}'\mu + \mathcal{Z}'\nu + \mathcal{L}'\alpha + \mathcal{M}'\beta + \mathcal{N}'\gamma$$

se réduit à la suivante :

$$\mathcal{X}\lambda + \mathcal{Y}\mu + \mathcal{Z}\nu = \mathcal{X}'\lambda + \mathcal{Y}'\mu + \mathcal{Z}'\nu;$$

cette égalité devant avoir lieu pour toute valeur de λ, μ, ν, on a

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}, \quad \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Z}' = \mathcal{Z}.$$

Ainsi : *deux systèmes équivalents ont les mêmes coordonnées.*

Projections du moment résultant d'un système en un point de l'espace.

Calculons le moment résultant d'un système de segments Σ par rapport à un point P (x_0, y_0, z_0) de l'espace.

Nous savons, d'après le n° 9 (p. 20), que les nombres qui mesurent sur les trois axes Ox, Oy, Oz les projections du moment d'un segment $X_iY_iZ_i$, $L_iM_iN_i$ par rapport au point $x_0y_0z_0$, ont pour expressions :

$$\mu_{i,x} = L_i + Y_iz_0 - Z_iy_0,$$
$$\mu_{i,y} = M_i + Z_ix_0 - X_iz_0,$$
$$\mu_{i,z} = N_i + X_iy_0 - Y_ix_0.$$

Les projections du moment résultant sont donc

$$\mu_x = \sum \mu_{i,x} = \sum (L_i + Y_iz_0 - Z_iy_0)$$
$$= \mathcal{L} + \mathcal{Y}z_0 - \mathcal{Z}y_0,$$
$$\mu_y = \mathcal{M} + \mathcal{Z}x_0 - \mathcal{X}z_0,$$
$$\mu_z = \mathcal{N} + \mathcal{X}y_0 - \mathcal{Y}x_0,$$

formules importantes, sur lesquelles il y a lieu d'attirer dès maintenant l'attention.

On voit par ces formules que le moment résultant en un point ne fait intervenir que les coordonnées du système de segments, ce qu'il était facile de prévoir.

Moment de deux systèmes de segments.

La considération des systèmes de segments donne lieu à une belle extension de la notion de moment.

Soient deux systèmes Σ, Σ', prenons un segment dans chacun d'eux et formons la somme algébrique des moments de tous les groupes possibles de deux segments ainsi choisis; cette somme est, par définition, le *moment des deux systèmes* de segments.

$$\text{moment}\,(\Sigma, \Sigma') = \sum_{i,j} \text{moment}\,(\overline{S}_i, \overline{S'_j}),$$

où $\overline{S}_i$ est un segment pris dans Σ et $\overline{S'_j}$ un segment pris dans Σ'. On a donc aussi (p. 17)

$$\text{moment}\,(\Sigma, \Sigma') = \sum_{i,j} (X_i L'_j + Y_i M'_j + Z_i N'_j + X'_j L_i + Y'_j M_i + Z'_j N_i).$$

Groupons, dans le second membre, tous les termes ayant même indice j, et appelons $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ les coordonnées de Σ, nous avons

$$\begin{aligned}\text{moment}\,(\Sigma, \Sigma') = {} & \mathcal{X} \sum_j L'_j + \mathcal{Y} \sum_j M'_j + \mathcal{Z} \sum_j N'_j \\ & + \mathcal{L} \sum_j X'_j + \mathcal{M} \sum_j Y'_j + \mathcal{N} \sum_j Z'_j.\end{aligned}$$

Introduisons encore les coordonnées $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$ de Σ' et nous aurons finalement

$$\begin{aligned}\text{moment}\,(\Sigma, \Sigma') = {} & \mathcal{X}\mathcal{L}' + \mathcal{Y}\mathcal{M}' + \mathcal{Z}\mathcal{N}' \\ & + \mathcal{X}'\mathcal{L} + \mathcal{Y}'\mathcal{M} + \mathcal{Z}'\mathcal{N}.\end{aligned}$$

Lorsque le moment relatif de deux systèmes de segments est nul, on dit que ces deux systèmes sont en *involution*.

Rien n'empêche dans les calculs qui précèdent de supposer que Σ' soit équivalent à Σ, la formule se simplifie alors et donne

$$\text{moment}\,(\Sigma, \Sigma') = 2\,(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \mathcal{N}\mathcal{Z});$$

on peut appeler cette expression l'*automoment* du système Σ.

Observons que si Σ' est entièrement identique à Σ, les segments $\overline{S'_j}$ sont les mêmes que les $\overline{S}_i$, et dans notre évaluation de la somme des moments, chaque moment figure deux fois.

Donc la somme des moments des segments $\overline{S}_i$ pris deux à deux est égale seulement à

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \mathcal{N}\mathcal{Z}.$$

Invariants d'un système de segments.

Ceci nous prouve que l'expression précédente, que nous représenterons par $\mathcal{H}$, est un invariant à plusieurs titres :

1° Au point de vue d'une transformation des coordonnées;

2° Au point de vue de la substitution au système Σ d'un système équivalent.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

La somme des moments des segments d'un système pris deux à deux reste invariable si l'on remplace le système par un système équivalent.

Au lieu de moments on peut parler de tétraèdres et dire :

La somme des tétraèdres construits sur les segments d'un système pris deux à deux est invariable si l'on remplace le système par un autre équivalent.

Nous rencontrerons plus loin un cas particulier de ce théorème dû à Chasles, qui marque l'introduction des tétraèdres dans cette partie de la théorie des segments.

La considération de la résultante de translation nous fournit encore un invariant dans la somme

$$\mathfrak{R}^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2,$$

nous prendrons pour $\mathfrak{R}$ la valeur positive

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}.$$

Le quotient

$$h = \frac{\mathcal{H}}{\mathfrak{R}^2}$$

est aussi un invariant; il représente une ligne, car $\mathfrak{R}$ est une ligne et $\mathcal{H}$ est un volume. Nous donnerons à h le nom de *paramètre.*

Systèmes réductibles à un segment unique.

Nous allons examiner deux cas particuliers de systèmes de segments.

Le premier c'est celui où l'automoment est nul, sans que $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ le soient.

On a, dans ce cas,

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \mathcal{N}\mathcal{Z} = 0.$$

Ce qui prouve que l'on peut regarder $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ comme les coordonnées d'un segment $\overline{\mathrm{S}}$. D'après la notion même de l'équivalence, le système est alors équivalent à ce segment unique.

Réciproquement, si le système Σ est équivalent à un segment unique X, Y, Z, L, M, N, la condition d'équivalence donne

$$\mathfrak{X} = X, \quad \mathfrak{Y} = Y, \quad \mathfrak{Z} = Z, \quad \mathfrak{L} = L, \quad \mathfrak{M} = M, \quad \mathfrak{N} = N,$$

et comme $LX + MY + NZ = 0$, on a

$$\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0.$$

Ainsi, $\mathfrak{H} = 0$ (sans que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ soint tous nuls), c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système Σ soit réductible à un segment unique.

Couple.

12. Examinons maintenant le cas où l'on aurait

$$\mathfrak{X} = 0, \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \mathfrak{Z} = 0,$$

sans que $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ soient tous nuls. Dans ce cas, la résultante de translation du système est nulle. Un tel système de segments a été étudié par Poinsot sous le nom de *couple*.

Si l'on se reporte aux formules

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} z_0 - \mathfrak{Z} y_0, \\ \mu_y &= \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} x_0 - \mathfrak{X} z_0, \\ \mu_z &= \mathfrak{N} + \mathfrak{X} y_0 - \mathfrak{Y} x_0, \end{aligned}$$

qui donnent le moment résultant du système $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ en un point x_0, y_0, z_0 de l'espace, on voit que, pour un couple, elles se réduisent à

$$\mu_x = \mathfrak{L}, \quad \mu_y = \mathfrak{M}, \quad \mu_z = \mathfrak{N}.$$

Moment d'un couple.

On peut donc définir un couple comme *un système de segments qui a même moment résultant en tous les points de l'espace.* Ce moment résultant constant est ce que l'on appelle *moment du couple*. Il est représenté par le segment dont $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont les projections sur les axes de coordonnées. Pour avoir le moment d'un couple, par rapport à un axe Δ on peut, suivant la méthode générale du n° 10, prendre le moment par rapport à un point O de cet axe et le projeter sur Δ. Donc :

Le moment d'un couple par rapport à un axe Δ s'obtient en projetant sur cet axe le moment du couple. On en peut conclure que pour deux axes parallèles et de même sens les moments d'un couple sont égaux.

Pour que le moment du couple par rapport à Δ soit nul, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que Δ soit rectangulaire avec le segment qui représente le moment du couple.

Tout plan normal au moment du couple porte le nom de *plan du couple*.

Équivalence de la définition donnée du couple et de celle de Poinsot.

Proposons-nous de trouver deux segments $\overline{S}$, $\overline{S'}$ formant un système équivalent au couple.

Menons un axe quelconque Δ qui coupe $\overline{S}$ et $\overline{S'}$; le moment résultant par rapport à Δ est nul; donc Δ est parallèle au plan du couple. Ainsi, toute droite qui coupe $\overline{S}$ et $\overline{S'}$ est parallèle au plan du couple. Il en résulte évidemment que $\overline{S}$ et $\overline{S'}$ sont contenus dans un même plan du couple. De plus, ils ne peuvent s'y couper, sans quoi ils auraient une résultante unique non nulle. Ils sont donc parallèles, et comme leur résultante de translation est nulle, puisque leur ensemble est équivalent au couple, ils doivent être égaux, parallèles et de sens opposés, sans pour cela être directement opposés.

Prenons dès lors un point O sur le segment $\overline{S'}$, menons par O le segment $\overline{OG}$ qui représente le moment du couple, le moment de $\overline{S}$ par rapport au point O doit être représenté par $\overline{OG}$.

Supposons réciproquement cette condition remplie; je dis que $\overline{S}$, $\overline{S'}$ forment un système équivalent au couple proposé.

En effet, le système des deux segments forme évidemment un couple, puisque leur résultante de translation est nulle. Ce couple admet au point O le même moment $\overline{OG}$ que le couple proposé, donc il admet en chaque point de l'espace ce moment $\overline{OG}$, et est ainsi équivalent au couple proposé.

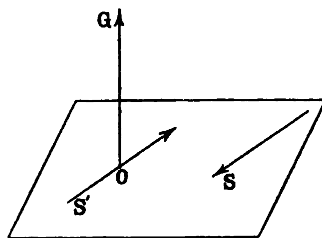


Fig. 12.

On voit, en résumé, que tout couple peut être réalisé d'une infinité de manières par un système de deux segments égaux, parallèles et de sens opposés, assujettis seulement aux conditions suivantes :

1° Leur plan doit être un plan du couple;

2° Le moment de l'un des deux segments par rapport à un point de l'autre doit être un segment égal et parallèle au moment du couple.

REMARQUE. — Cette manière de présenter les choses rend intuitives ces propositions d'après lesquelles un couple peut être transporté dans son plan ou dans des plans parallèles, et peut être modifié pourvu que le produit du segment par le bras de levier reste constant.

La démonstration de ces propositions est nécessaire quand on se place au point de vue de Poinsot, pour qui un couple ne fut jamais qu'un système de deux segments égaux, parallèles, et de sens opposés.

Il y a cependant avantage à introduire la définition plus générale d'où nous sommes partis. L'application suivante va le montrer.

Aire de la projection d'un contour.

Considérons un polygone fermé gauche ou plan $P\,P_1P_2P_3\ldots P_nP$ et attribuons à ce polygone un sens de parcours, soit le sens P, P_1, P_2, ..., P_n, P.

Envisageons alors le système de segments $\overline{PP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP}$. Ces segments forment un système fermé; leur système est un couple. Soit $\overline{G}$ le moment de ce couple.

Prenons maintenant un axe quelconque Δ, et un plan π normal à cet axe; projetons orthogonalement le contour précédent sur le plan π, nous obtiendrons le polygone plan $P'P'_1$ ... P'_nP'; nous avons déjà vu que, par rapport à Δ, le moment de $\overline{P_iP_{i+1}}$ est égal au moment du segment $\overline{P'_iP'_{i+1}}$, c'est-à-dire au double de l'aire du triangle $OP'_iP'_{i+1}$, où O est le pied de l'axe Δ sur le plan π.

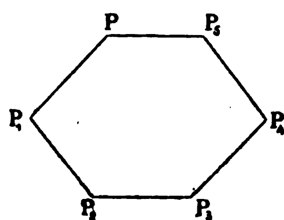


Fig. 13.

Les aires de ces triangles sont, du reste, affectées de signes d'après la convention habituelle pour les moments. La somme algébrique de ces triangles a pour expression l'aire (affectée d'un signe) du polygone $P'P'_1P'_2\ldots P'_nP'$. Mais cette somme est aussi la moitié du moment résultant du couple par rapport à l'axe Δ, moment que l'on obtient en projetant $\overline{G}$ sur cet axe. On voit donc que la projection du moment du couple $\overline{G}$ sur un axe quelconque Δ, représente le double de l'aire de la projection, sur un plan π normal à Δ, du contour de l'espace qui donne naissance au couple.

Au lieu d'un polygone on pourrait envisager un contour curviligne, à la condition de le regarder comme la limite d'un polygone inscrit.

Tout contour fermé doué d'un sens de parcours donne donc lieu à un couple dont le moment projeté sur un axe Δ fournit le double de

l'aire, affectée d'un signe, de la projection de ce contour sur un plan normal à Δ.

En appelant μ la longueur du moment du couple, construisons dans un plan du couple un cercle de rayon égal à

$$\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}};$$

la projection de ce cercle sur un plan quelconque aura la même aire que la projection du contour proposé.

Plan orienté.

La valeur obtenue pour l'aire de la projection d'un contour sur le plan normal à un axe quelconque a été affectée d'un signe. Ce signe est lié au sens de parcours de la projection du contour :

On dit qu'un plan est *orienté* si un axe est choisi sur la perpendiculaire à ce plan. Le sens de rotation direct dans le plan est, par définition, le sens de rotation de gauche à droite pour un observateur traversé des pieds à la tête par cet axe.

Dans un plan orienté, l'aire limitée par un contour parcouru dans un certain sens a le signe + ou le signe — suivant que le sens de parcours du contour est le sens direct ou le sens inverse.

Il est facile de voir que le signe fixé précédemment pour l'aire de la projection du contour fermé est celui que la définition donnée en dernier lieu conduit à adopter.

Composition des systèmes de segments.

12bis. Soient Σ, Σ' deux systèmes de segments ; l'ensemble de ces deux ensembles de segments constitue un système qu'on appelle le *système résultant* des deux autres.

D'après la définition même des moments résultants on voit que :

Le moment résultant par rapport à un axe, du système Σ", qui résulte de la composition des systèmes Σ, Σ', est la somme des moments résultants de Σ, Σ' par rapport à cet axe.

Le moment résultant de Σ" en un point est la somme géométrique des moments résultants des systèmes Σ, Σ' en ce point.

De même la résultante de translation de Σ" est la somme géométrique des résultantes de translation de Σ, Σ'.

Par suite :

Les coordonnées du système résultant des systèmes Σ, Σ' sont les sommes des coordonnées correspondantes des sytèmes Σ et Σ'.

Composition des couples.

Considérons le cas de deux couples

$$\begin{aligned} &0, \quad 0, \quad 0, \quad \mathcal{L}, \ \mathcal{M}, \ \mathcal{N}, \\ &0, \quad 0, \quad 0, \quad \mathcal{L}', \mathcal{M}', \mathcal{N}'. \end{aligned}$$

Le système résultant est un couple dont le moment est la somme géométrique des moments des deux couples.

On arrive ainsi, d'une manière intuitive, à la règle de la composition des couples énoncée par Poinsot.

Réduction à deux segments.

Comme application nous allons traiter deux problèmes importants de la composition des systèmes de segments.

Proposons-nous d'abord de trouver deux segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ formant un système équivalent à un système donné.

Désignons par $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ les coordonnées du système et prenons pour inconnues les coordonnées $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$; $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$ des segments S_1 et S_2.

Les conditions exprimant l'équivalence sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= L_1 + L_2, \quad & \mathcal{M} &= M_1 + M_2, \quad & \mathcal{N} &= N_1 + N_2, \\ \mathcal{X} &= X_1 + X_2, \quad & \mathcal{Y} &= Y_1 + Y_2, \quad & \mathcal{Z} &= Z_1 + Z_2. \end{aligned}$$

Rappelons en outre les relations

$$L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0, \qquad L_2X_2 + M_2Y_2 + N_2Z_2 = 0.$$

En tirant $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$ des six premières équations pour les porter à la dernière, on trouve

$$(\mathcal{X} - X_1)(\mathcal{L} - L_1) + (\mathcal{Y} - Y_1)(\mathcal{M} - M_1) + (\mathcal{Z} - Z_1)(\mathcal{N} - N_1) = 0,$$

ou, en tenant compte de $L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1 = 0$,

$$\mathcal{H} - (\mathcal{L}X_1 + \mathcal{M}Y_1 + \mathcal{N}Z_1 + \mathcal{X}L_1 + \mathcal{Y}M_1 + \mathcal{Z}N_1) = 0.$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ les coordonnées d'un axe portant le segment $\overline{S_1}$ et soit s_1 le nombre qui mesure $\overline{S_1}$ sur cet axe; on a, d'après une remarque déjà faite,

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 s_1, \quad & Y_1 &= \beta_1 s_1, \quad & Z_1 &= \gamma_1 s_1, \\ L_1 &= \lambda_1 s_1, \quad & M_1 &= \mu_1 s_1, \quad & N_1 &= \nu_1 s_1. \end{aligned}$$

L'équation précédente donne donc

$$(1) \quad \mathcal{H} - (\mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1 + \mathcal{X}\lambda_1 + \mathcal{Y}\mu_1 + \mathcal{Z}\nu_1)\, s_1 = 0,$$

égalité qui permet de calculer s_1, connaissant $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$.

Le segment $\overline{S_1}$ étant dès lors connu, les coordonnées de $\overline{S_2}$ s'en déduisent immédiatement.

On voit, en conséquence, que l'on peut toujours trouver deux segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ *formant un système équivalent à un système donné et dont l'un soit porté par un axe arbitrairement choisi.*

Notons cependant que si

$$(2) \qquad \mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1 + \mathcal{X}\lambda_1 + \mathcal{Y}\mu_1 + \mathcal{Z}\nu_1 = 0,$$

l'équation (1) ne détermine plus s_1, il y a impossibilité. Or, l'équation (2) exprime que le moment du système proposé par rapport à l'axe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est nul. Nous voyons ici apparaître pour la première fois ces axes remarquables introduits par Möbius : les *axes de moment nul*. Le problème précédemment résolu est impossible si l'on assujettit le segment $\overline{S_1}$ à être porté par un axe de moment nul.

Théorème de Chasles. Supposons que l'on ait réduit de deux manières le système Σ à deux segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ d'une part et $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$ d'autre part. L'invariant $\mathcal{H}$ est le moment de $\overline{S_1}$ et de $\overline{S_2}$, c'est aussi celui de $\overline{S'_1}$ et $\overline{S'_2}$; en parlant de tétraèdres au lieu de moments on arrive à ce théorème de Chasles :

Si l'on a réduit de deux manières un système de segments à un ensemble de deux segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ *et* $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$, *les tétraèdres* $(\overline{S_1}, \overline{S_2})$ *et* $(\overline{S'_1}, \overline{S'_2})$ *sont égaux en grandeur et en signe.*

On voit que $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ sont *dextrorsum* ou *sinistrorsum* selon que $\mathcal{H}$ est positif ou négatif. Nous verrons plus loin que les systèmes de segments forment deux grandes catégories; les uns pour lesquelles $\mathcal{H} > 0$, les autres pour lesquelles $\mathcal{H} < 0$.

On doit observer que les deux segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ ne peuvent se couper, sans quoi on aurait une résultante unique. Dans ce cas $\mathcal{H}$ serait nul et s_1 aussi; le segment S_1 n'existerait pas.

Théorème. — Démontrons encore la proposition suivante que nous retrouverons plus loin sous une autre forme :

Supposons qu'on ait réduit de deux manières un système de segments à deux $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ *et* $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$. *Ces segments sont portés par quatre génératrices d'un même système d'une surface du second degré.*

Soit, en effet, une droite Δ qui coupe $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{S'_2}$; comme Δ coupe $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ le moment résultant du système par rapport à Δ est nul, Δ est un axe de moment nul. Il faut donc que le moment résultant de $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$, par rapport à Δ, soit aussi nul. Mais $\overline{S'_1}$ coupe Δ, donc $\overline{S'_2}$ doit aussi couper Δ. Ainsi : toute droite Δ qui coupe $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{S'_1}$ coupe aussi $\overline{S'_2}$. Nous avons vu que $\overline{S_2}$ ne peut couper $\overline{S_1}$; on suppose $\overline{S'_1}$ porté par un axe arbitraire, qui ne coupe ni $\overline{S_1}$ ni $\overline{S_2}$.

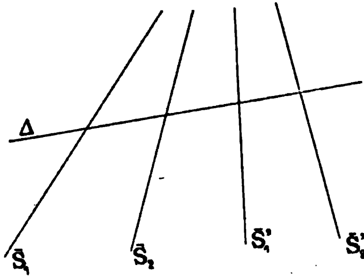


Fig. 14.

Donc le lieu de Δ est une surface de second degré et $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$ sont portés par quatre génératrices d'un même système de cette surface. On observera que les génératrices de l'autre système sont des axes de moment nul.

Le théorème tombe en défaut si $\overline{S'_1}$ coupe $\overline{S_1}$ ou $\overline{S_2}$. Supposons que $\overline{S'_1}$ coupe $\overline{S_1}$ en un point O_1, je dis que $\overline{S_2}$ et $\overline{S'_2}$ se coupent en un point O_2. Menons, en effet, un plan par O_1 et par la droite $\overline{S_2}$; toute droite Δ issue de O_1 dans ce plan coupe $\overline{S_1}$, $\overline{S'_1}$ et $\overline{S_2}$, elle coupe donc $\overline{S'_2}$; il faut, en conséquence (puisque $\overline{S'_2}$ ne peut passer par O_1, sans quoi elle couperait $\overline{S'_1}$), que $\overline{S'_2}$ soit dans le plan considéré. Ainsi $\overline{S_2}$ et $\overline{S'_2}$ sont dans un même plan passant par O_1; elles se coupent donc en un point O_2, et l'on verrait que le plan de $\overline{S_1}$ et de $\overline{S'_1}$ passe aussi par O_2.

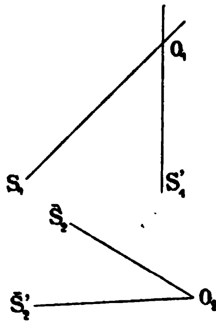


Fig. 15.

Réduction à un segment unique et à un couple.

13. Proposons-nous actuellement de réduire un système de segments à un segment unique et à un couple.

Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du segment $\overline{S}$ et 0, 0, 0, L', M', N' celles du couple G'.

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ désignant comme précédemment les coordonnées du système de segments, on aura, d'après les conditions d'équivalence,

$$\mathfrak{X} = X, \quad \mathfrak{Y} = Y, \quad \mathfrak{Z} = Z;$$
$$\mathfrak{L} = L + L', \quad \mathfrak{M} = M + M', \quad \mathfrak{N} = N + N'.$$

On voit d'abord que X, Y, Z sont déterminés.

Donc *la longueur et la direction du segment* $\bar{S}$ *sont déterminées indépendamment du couple* G'.

L M N doivent vérifier la relation

$$LX + MY + NZ = 0,$$

donc

$$(\mathcal{L} - L')\mathcal{X} + (\mathcal{M} - M')\mathcal{Y} + (\mathcal{N} - N')\mathcal{Z} = 0,$$

ou

$$\mathcal{H} - (L'\mathcal{X} + M'\mathcal{Y} + N'\mathcal{Z}) = 0.$$

Le couple G' étant choisi arbitrairement parmi ceux qui vérifient la relation précédente, le segment $\bar{S}$, qu'il faudra lui adjoindre pour former un système équivalent au système proposé, sera entièrement déterminé; ses coordonnées sont, en effet,

$$X = \mathcal{X},\quad Y = \mathcal{Y},\quad Z = \mathcal{Z},\quad L = \mathcal{L} - L',\quad M = \mathcal{M} - M',\quad N = \mathcal{N} - N'.$$

Nous allons interpréter la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées du couple G'. Nous avons posé

$$\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2},$$

et, comme $\mathcal{R}$ est différent de zéro, le système n'étant pas un couple, on peut écrire

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}} = L'\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{R}} + M'\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}} + N'\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{R}}.$$

Cette équation exprime que la projection du moment du couple G' sur la résultante de translation du système Σ a une valeur déterminée $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}}$, ou si l'on veut que le moment du couple G' par rapport à tout axe qui a la direction de la résultante de translation a une valeur donnée.

On pourra donc se donner arbitrairement le plan du couple, c'est-à-dire les cosinus directeurs de l'axe du couple auxquels L', M', N' sont proportionnels; la longueur du moment du couple se trouve déterminée. Observons toutefois que le plan du couple ne saurait être parallèle à la résultante de translation.

Nous avons ainsi réalisé la réduction à un segment et à un couple

d'un système de segments en nous donnant le couple; proposons-nous au contraire, étant donné le segment lui-même, de déterminer le couple qu'il faudra lui adjoindre. Le segment, dont nous connaissons les projections, sera déterminé si l'on se donne un point de la droite qui le porte.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point P par où passe le segment $\overline{S}$.

Les coordonnées du segment $\overline{S}$ sont

$$\mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},\quad \mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z,\quad \mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x,\quad \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y.$$

Le moment du système au point P se réduit au moment du couple G', puisque le segment passe par P; or, on a vu que le moment d'un système en un point P a pour projections :

$$\begin{gathered}\mathfrak{L} + \mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y,\\ \mathfrak{M} + \mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z,\\ \mathfrak{N} + \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x.\end{gathered}$$

Ces expressions représentent donc les projections du moment du couple au point P; et, comme le moment d'un couple est le même en tous les points de l'espace, ce sont les projections du moment du couple. On a donc

$$\begin{aligned}L' &= \mathfrak{L} + \mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y,\\ M' &= \mathfrak{M} + \mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z,\\ N' &= \mathfrak{N} + \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x.\end{aligned}$$

Ces formules résolvent complètement le problème proposé.

Ainsi l'on peut se donner soit la position du segment S dont la longueur et la direction sont données, soit le plan du couple, à la condition qu'il ne soit pas parallèle à la résultante de translation.

Réduction canonique. — Axe central. Entre tous les choix que l'on peut faire pour le plan du couple, il en est un particulièrement remarquable, c'est celui d'un plan normal à la direction de la résultante de translation.

On prendra dans ce cas L', M', N' proportionnels à $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Cherchons alors à déterminer le segment $\overline{S}$, ou plutôt sa ligne d'action, nous avons

$$\frac{L'}{\mathfrak{X}} = \frac{M'}{\mathfrak{Y}} = \frac{N'}{\mathfrak{Z}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y}{\mathfrak{X}} = \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}y}{\mathfrak{Y}} = \frac{\mathfrak{N} + \mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x}{\mathfrak{Z}}.$$

Multiplions les deux termes de chaque rapport respectivement par $\mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$ et ajoutons, il vient pour la valeur commune de ces rapports :

$$\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}^2} = h,$$

et par suite, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z &= \mathfrak{L} - h\mathfrak{X}, \\ \mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x &= \mathfrak{M} - h\mathfrak{Y}, \\ \mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y &= \mathfrak{N} - h\mathfrak{Z}, \end{aligned}$$

ce qui détermine la ligne d'action du segment $\bar{S}$.

On appelle cette droite l'*axe central*.

Les coordonnées du segment porté par l'axe central sont

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\quad \mathfrak{L} - h\mathfrak{X},\quad \mathfrak{M} - h\mathfrak{Y},\quad \mathfrak{N} - h\mathfrak{Z},$$

et celles du couple correspondant

$$0,\ 0,\ 0,\quad h\mathfrak{X},\ h\mathfrak{Y},\ h\mathfrak{Z}.$$

Le moment de ce couple a donc la direction même de la résultante de translation si $h > 0$, ce qui revient à $\mathfrak{H} > 0$, et la direction opposée si $h < 0$, c'est-à-dire si $\mathfrak{H} < 0$.

Il est bon de faire remarquer que si le système est réductible à un segment unique, $\mathfrak{H}$ est nul et l'axe central devient la droite qui porte le segment unique équivalent au système.

Vis. Considérons un système de segments qui soit unitaire, c'est-à-dire dont la résultante de translation ait la longueur 1. Un tel système a reçu le nom de *vis*. La considération en a été introduite par M. Ball.

Soient a, b, c, l, m, n les coordonnées d'une vis, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

et l'invariant $\mathfrak{H}$ se réduit à

$$h = al + bm + cn,$$

c'est-à-dire au *paramètre* qui s'appelle aussi le *pas* de la vis.

Il y a deux sortes de vis : les vis *dextrorsum* pour lesquelles $h > 0$, les vis *sinistrorsum* pour lesquelles $h < 0$.

Si $h = 0$, les coordonnées a, b, c, l, m, n deviennent celles d'un segment unitaire, c'est-à-dire d'un axe. Ainsi une vis dégénère en un axe, de même qu'un système de segments dégénère en un segment.

Considérons maintenant un système de segments

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N};$$

il est clair que si l'on multiplie ou divise par un même nombre positif tous les segments qui le composent, ses coordonnées sont multipliées ou divisées par ce nombre.

Divisons, en particulier, par $\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} = \mathfrak{R}$, ou par le *module* du système de segments, comme on dit quelquefois; les coordonnées du système deviendront

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{R}},\ \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{R}},\ \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{R}},\ \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}},\ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}},\ \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{R}}.$$

Ce sont les coordonnées d'une vis.

Ainsi, en divisant par $\mathfrak{R}$ les longueurs de tous les segments, le système de segments devient une vis. On peut énoncer ce fait en disant que tout système de segments résulte du produit d'une vis par un nombre positif.

Cette proposition est à rapprocher de la suivante : Tout segment est le produit d'un segment unitaire (un axe) par un nombre positif.

Nous dirons de la vis qu'elle porte le système de segments qu'on peut en déduire par multiplication.

Les équations qui donnent l'axe central contenant $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sous forme homogène, l'axe central du système est l'axe même de la vis qui le porte; le pas de la vis h a pour expression

$$h = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}^2},$$

c'est donc le paramètre du système de segments.

Le système est *dextrorsum* ou *sinistrorsum* selon que la vis qui

le porte est *dextrorsum* ou *sinistrorsum*, c'est-à-dire selon que $\mathcal{H}$ est positif ou négatif.

On a été amené à donner le nom de vis aux systèmes particuliers que nous venons d'étudier par la considération suivante :

Supposons que les segments soient des forces agissant sur un système de points géométriques invariablement liés entre eux et de masses nulles.

Représentons-nous le système réduit au segment $\mathfrak{R}$ et à un couple $\mathfrak{G}$ dont le plan soit normal à $\mathfrak{R}$. Si $\mathcal{H} > 0$, le moment du couple $\mathfrak{G}$ a le sens de $\mathfrak{R}$, et pour un observateur traversé des pieds à la tête par $\mathfrak{R}$, l'effet du système de forces se compose d'une traction de bas en haut et d'un mouvement de rotation de gauche à droite. Les points du corps mobile décrivent donc des arcs d'hélices de même pas; l'effet des forces sera d'imprimer au corps un mouvement de torsion analogue à celui d'une vis dans son écrou, la vis étant *dextrorsum*.

Si $\mathcal{H} < 0$ la rotation est de droite à gauche; la vis directrice du mouvement est *sinistrorsum*.

Torseur et dyname. L'utilité de la considération des vis apparaîtra encore plus clairement lorsque nous appliquerons les propriétés des segments à la théorie du déplacement d'un corps solide. Qu'il nous suffise de rappeler que Ball a appelé *torseur* et Plucker *dyname* l'ensemble des forces appliquées à un corps solide.

La théorie des segments interprétés comme des forces devient celle des torseurs ou des dynames, dont les principes remontent au célèbre traité de statique de Poinsot.

Équation des axes de moment nul. Nous avons eu l'occasion de parler plus haut des axes de moment nul relatifs à un système de segments. Ces axes sont définis par l'équation

$$\mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{N}\gamma + \mathfrak{X}\lambda + \mathfrak{Y}\mu + \mathfrak{Z}\nu = 0.$$

Introduisons les coordonnées du segment $\bar{S}$ de la réduction canonique, porté par l'axe central

$$\mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},\quad \mathfrak{L} - h\mathfrak{X},\quad \mathfrak{M} - h\mathfrak{Y},\quad \mathfrak{N} - h\mathfrak{Z},$$

on pourra écrire ainsi l'équation précédente

$$(\mathfrak{L} - h\mathfrak{X})\alpha + (\mathfrak{M} - h\mathfrak{Y})\beta + (\mathfrak{N} - h\mathfrak{Z})\gamma \\ + \mathfrak{X}\lambda + \mathfrak{Y}\mu + \mathfrak{Z}\nu + h(\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma) = 0.$$

On voit que

$$(\mathfrak{L}-h\mathfrak{X})\alpha+(\mathfrak{M}-h\mathfrak{Y})\beta+(\mathfrak{N}-h\mathfrak{Z})\gamma+\mathfrak{X}\lambda+\mathfrak{Y}\mu+\mathfrak{Z}\nu$$

représente le moment par rapport à l'axe Δ considéré du segment $\bar{S}$; d'un autre côté, $\mathfrak{X}\alpha + \mathfrak{Y}\beta + \mathfrak{Z}\gamma$, c'est la projection de ce même segment $\bar{S}$ sur l'axe Δ; la condition pour qu'un axe Δ soit de moment nul peut donc s'écrire :

$$\text{moment}\,(\bar{S},\,\Delta) + h\,\text{proj.}\,(\bar{S},\,\Delta) = 0,$$

équation qui ne contient plus explicitement les coordonnées.

Appelons Δ_0 l'axe central, si l'on observe que

$$\text{moment}\,(\bar{S},\,\Delta) = \text{moment}\,(\Delta_0,\,\Delta) \times \text{longueur}\,\bar{S};$$
$$\text{proj.}\,(\bar{S},\,\Delta) = \text{proj.}\,(\Delta_0,\,\Delta) \times \text{longueur}\,\bar{S},$$

on a

$$\text{moment}\,(\Delta_0,\,\Delta) + h\,\text{proj.}\,(\Delta_0,\,\Delta) = 0,$$

formule où les axes Δ_0, Δ entrent symétriquement.

La théorie des axes de moment nul touche de très près à l'importante théorie des complexes.

Théorie de la droite.

Coordonnées d'une droite.

14. Nous avons vu que X, Y, Z, L, M, N, liés par la relation

$$LX + MY + NZ = 0,$$

constituent les coordonnées d'un segment porté par une droite représentée par les équations

$$\left\{\begin{aligned} Zy - Yz &= L,\\ Xz - Zx &= M,\\ Yx - Xy &= N.\end{aligned}\right.$$

Supposons que l'on fasse varier la longueur, et si l'on veut le sens de ce segment, alors X, Y, Z, L, M, N sont multipliés par un même nombre positif ou négatif; les trois équations précédentes ne chan-

gent pas, la ligne qui porte le segment est la même. Dans ces conditions, on peut regarder

$$X, Y, Z, L, M, N$$

comme les *coordonnées homogènes d'une droite;* ce sont les coordonnées d'un segment de longueur et de sens indéterminés porté par cette droite. On voit comment de la notion des coordonnées d'un segment se déduit la notion des coordonnées d'une droite.

Entre ces six coordonnées existe la relation quadratique

$$LX + MY + NZ = 0;$$

de plus, ces coordonnées sont définies à un facteur constant près, elles ne constituent, en conséquence, qu'un ensemble de 4 paramètres.

Une droite est donc déterminée dans l'espace par quatre conditions se traduisant chacune par une équation.

Série réglée. Si l'on donne trois conditions seulement, un paramètre reste arbitraire, on a une *série réglée :* le lieu des droites d'une série réglée est en général une surface gauche ou développable. Cependant les tangentes d'une courbe plane, les droites d'un faisceau plan constituent des séries réglées sans former pour cela des surfaces à proprement parler. Par contre, une quadrique ou un plan sont le lieu de plusieurs séries réglées.

Congruences. Les droites qui ne vérifient que deux conditions dépendent de deux paramètres; elles forment ce que l'on appelle une *congruence.* Exemples : les tangentes communes à deux surfaces, les cordes d'une courbe gauche, les droites qui coupent deux courbes données, les normales à une surface. On démontre que toute congruence est en général formée de droites tangentes à deux surfaces appelées *surfaces focales.* Ces surfaces focales peuvent dégénérer en des courbes.

Par exemple, les droites qui coupent deux droites données forment ce que l'on appelle une *congruence linéaire.*

Il existe des surfaces pour lesquelles la congruence des normales admet comme surfaces focales, au lieu de surfaces proprement dites, deux courbes, ce sont les surfaces *cyclides.* Leurs normales coupent constamment une ellipse et une hyperbole focales l'une de l'autre.

L'*ordre* d'une congruence est le nombre des droites de cette

congruence issues d'un point; la *classe* est le nombre de ces droites situées dans un plan.

Complexes.

Les droites qui sont assujetties à une seule condition forment un *complexe*.

Les droites d'un complexe issues d'un point P forment un cône; les droites d'un complexe situées dans un plan π enveloppent une courbe.

On appelle *ordre* d'un complexe le nombre des droites de ce complexe qui, issues d'un point P, sont situées dans un plan π mené par ce point.

L'ordre d'un complexe est égal au degré du cône relatif à un point et à la classe de la courbe relative à un plan.

En effet, pour avoir les droites du complexe issues du point P dans le plan π, on peut considérer le cône de sommet P et le couper par le plan π issu de P, le nombre de ces droites est le degré du cône; on peut aussi mener du point P les tangentes à la courbe enveloppe dans le plan π, le nombre de ces droites est la classe de la courbe enveloppe.

Les tangentes à une surface, les droites qui rencontrent une courbe forment des complexes, mais des complexes singuliers; un complexe n'est pas en général formé des tangentes d'une surface ou des sécantes d'une courbe. En un mot, les droites d'un complexe n'ont, en général, pas d'enveloppe.

Un complexe singulier remarquable est celui des droites de longueur nulle, c'est-à-dire des droites qui coupent le cercle de l'infini. Ce complexe joue un rôle très important dans certaines transformations géométriques.

Complexe linéaire.

15. Le plus simple de tous les complexes est le *complexe linéaire* ou d'ordre 1. Il est représenté par une équation linéaire et homogène en X, Y, Z, L, M, N.

Exprimons, en effet, que la droite, dont X, Y, Z, L, M, N sont les coordonnées, joint deux points x, y, z, x', y', z', nous avons

$$\begin{aligned} L &= Zy' - Yz' = Zy - Yz, \\ M &= Xz' - Zx' = Xz - Zx, \\ N &= Yx' - Xy' = Yx - Xy, \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{X}{x'-x}=\frac{Y}{y'-y}=\frac{Z}{z'-z}=\frac{L}{yz'-zy'}=\frac{M}{zx'-xz'}=\frac{N}{xy'-yx'}.$$

Soit

$$f(X, Y, Z, L, M, N) = 0.$$

l'équation homogène qui représente le complexe linéaire. On peut écrire cette équation sous la forme

$$f(x'-x,\ y'-y,\ z'-z,\ yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx') = 0.$$

Si l'on se donne x, y, z, le point x', y', z' décrit le cône dont x, y, z est le sommet; ce cône de degré 1, puisque le complexe est linéaire, est ici un plan; cette équation est donc du premier degré en x', y', z'. Pareillement elle est du premier degré en x, y, z; elle doit donc avoir la forme

$$\begin{aligned}(Ax + By + Cz + D)\,x' + (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\,y'\\ + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)z' + A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.\end{aligned}$$

De plus, pour $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, elle doit être vérifiée identiquement.

Or, on a, en faisant $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$,

$$\begin{aligned}Ax^2 + (B + A_1)\,xy + (C + A_2)\,xz + (D + A_3)\,x\\ + B_1y^2 + (C_1 + B_2)\,yz + (D_1 + B_3)\,y\\ + C_2z^2 + (C_3 + D_2)\,z + D_3 = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{array}{llll} A = 0, & A_1 = -B, & A_2 = -C, & A_3 = -D,\\ B_1 = 0, & B_2 = -C_1, & B_3 = -D_1, & \\ C_2 = 0, & C_3 = -D_2, & D_3 = 0; & \end{array}$$

et l'on a alors

$$\begin{aligned}(By + Cz + D)\,x' + (-Bx + C_1z + D_1)\,y'\\ + (-Cx - C_1y + D_2)\,z' + (-Dx - D_1y - D_2z) = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}D\,(x'-x) + D_1\,(y'-y) + D_2\,(z'-z)\\ - C_1\,(yz'-zy') + C\,(zx'-xz') - B\,(xy'-yx') = 0.\end{aligned}$$

Et, en revenant aux quantités X, Y, Z, L, M, N, on a

$$DX + D_1Y + D_2Z - C_1L + CM - BZ = 0,$$

équation linéaire et homogène en X, Y, Z, L, M, N.

Plan polaire. Les droites d'un complexe linéaire issues d'un point P engendrent un plan π passant par le point P; π est le *plan polaire* ou *plan focal* de P.

Pôle. Les droites tracées dans un plan π, y ont une enveloppe de classe 1; elles passent par un point fixe P appelé le *pôle* ou *foyer* du plan π. Il est évident que le plan focal d'un point P admet ce point comme foyer et que le pôle d'un plan π admet ce plan comme plan focal.

Théorème I. — Soient O, O′ deux points, π et π' leurs plans polaires. *Si le plan* π' *passe par le point* O, *le plan* π *passe aussi par le point* O′.

En effet, menons la droite OO′; le point O′ est déjà dans le plan π', si O est aussi dans ce plan, la droite OO′ est tout entière dans le plan π'; elle passe au pôle O′ de ce plan, elle fait partie du complexe; donc, puisqu'elle passe au point O, elle doit être contenue dans le plan π polaire de O. Les plans π et π' se coupent ainsi suivant la droite OO′, et par suite O′ est bien dans le plan π.

Droites conjuguées. **16.** Soient deux points quelconques O, O′ et π, π' leurs plans polaires. Appelons D la droite O O′ et Δ la droite d'intersection des plans π et π'. La droite Δ est ainsi définie comme intersection des plans polaires de deux points de D. Prenons deux points arbitraires O_1, O'_1 sur Δ, je vais prouver que D peut être définie comme l'intersection des plans polaires π_1, π'_1 de O_1 et O'_1.

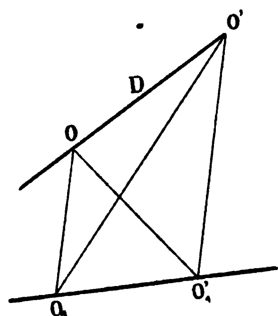


Fig. 16.

Prouvons d'abord que tout plan mené par D a son pôle sur Δ. Soit, par exemple, le plan O O_1 O′, où O_1 est un point quelconque de Δ. La droite OO_1 issue de O dans le plan O O_1 O'_1 (ou π) fait partie du complexe; de même la droite O′ O_1 issue de O′ dans le plan O′ $O_1$$O'_1$ (ou π') fait aussi partie du complexe. Donc O_1 est le point du plan OO_1O′ où se croisent les droites du complexe tracés dans ce plan; O_1 est le pôle de ce plan.

Cela posé, en répétant la démonstration pour le plan O O′ O'_1, on voit que O'_1 est le pôle de ce plan. La droite D est donc l'intersection des plans polaires O O_1 O′ et O O′ O'_1 (ou π_1 et π'_1) des points O_1 et O'_1.

THÉORÈME II. — *La droite* D *peut donc se déduire de* Δ *comme* Δ *a été déduite de* D. On en conclut en particulier que, de même que Δ est le lieu des pôles des plans menés par D, à son tour D est le lieu des pôles des plans menés par Δ.

La correspondance entre les droites D, Δ est réciproque; on leur donne le nom de *droites conjuguées.*

THÉORÈME III. — *Toute droite qui coupe deux droites conjuguées fait partie du complexe et toute droite du complexe qui coupe une droite* D *coupe sa conjuguée* Δ.

En effet, soit X une droite qui coupe les droites D et Δ, le point O où elle coupe D est le pôle du plan π mené par O et Δ; la droite X, issue de O dans son plan polaire π, fait donc partie du complexe. Réciproquement, une droite du complexe ne peut couper une droite D sans couper sa conjuguée Δ; elle coupe, en effet, Δ au foyer du plan qu'elle détermine avec D.

THÉORÈME IV. — *Deux couples de droites conjuguées constituent quatre génératrices d'un même système d'une quadrique.* En effet, soient D, Δ, D′, Δ′ ces deux couples; toute droite coupant D, Δ, D′ fait partie du complexe puisqu'elle coupe D, Δ; coupant D′, elle doit couper Δ′. Donc les droites qui s'appuient sur D, Δ, D′ s'appuient aussi sur Δ′.

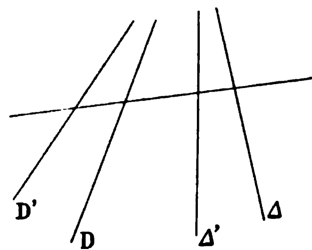


Fig. 17.

Deux droites conjuguées D, Δ ne peuvent se couper à moins que D ne soit une droite du complexe; mais alors Δ coïncide avec D, car toute droite du complexe contient tous les pôles des plans qui la contiennent.

Les droites D, Δ, D′ ne se coupent donc pas en général, sauf le cas où D′ couperait D ou Δ. Mais, ce cas exclu, D, Δ, D′ déterminent véritablement une quadrique et D, Δ, D′, Δ′ sont bien des génératrices

d'un même système, celles de l'autre système étant toutes des droites du complexe.

THÉORÈME V. — On démontrera sans peine que *toutes les droites* D *issues d'un point* O *ont pour conjuguées les droites* Δ *tracées dans le plan focal de* O. Cela tient à ce que la conjuguée d'une droite est contenue dans le plan focal de tout point de cette droite.

Réciprocité polaire.

Si une droite D engendre une figure autour d'un point O, sa conjuguée Δ engendre la figure corrélative dans le plan π focal de O.

A un trièdre de sommet O correspond un triangle dans le plan π; à un cône, une courbe définie par ses tangentes. On a donc là un mode de transformation des figures par dualité.

Considérons plus généralement une figure géométrique polyédrale offrant par conséquent des faces, des arêtes, des sommets; il lui correspondra une autre figure polyédrale dont les sommets correspondront aux faces de la première, les arêtes aux arêtes, les faces aux sommets.

Ces deux figures polyédrales seront polaires réciproques l'une de l'autre.

Au lieu de figures polyédrales on pourrait considérer des surfaces et l'on verrait que le lieu des pôles des plans tangents d'une surface S est une surface Σ qui est aussi l'enveloppe des plans polaires des points de S; les tangentes de Σ sont les conjuguées des tangentes de S.

Cette transformation conserve les tangentes asymptotiques.

Le caractère curieux de cette transformation, c'est que le plan polaire d'un point contient ce point.

Prenons par exemple un tétraèdre ABCD; appelons α, β, γ, δ ses faces. Le tétraèdre conjugué de celui-là aura pour sommets les points A', B' C', D', foyers des plans α, β, γ, δ et pour faces les plans focaux α', β', γ', δ' des points A, B, C, D. Chacun de ces deux tétraèdres sera donc à la fois inscrit et circonscrit à l'autre.

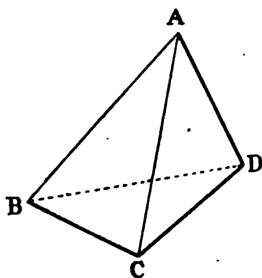


Fig. 18.

Ils forment une configuration remarquable sur laquelle Möbius a, il y a longtemps, attiré l'attention.

C'est Chasles, qui, dans son *Aperçu historique*, a signalé pour la

première fois la réciprocité remarquable qui résulte du complexe linéaire, auquel il a donné le nom de *système focal*.

Pôle du plan de l'infini.

On sait qu'en se plaçant au point de vue projectif les propriétés des points à l'infini des figures apparaissent comme exprimant la relation de ces figures avec une certain plan qui a reçu le nom de *plan de l'infini*. Par exemple, les droites d'un complexe linéaire situées à l'infini passent toutes par un point à l'infini, que nous appellerons le *pôle du plan de l'infini*.

Cela signifie que pour qu'un plan coupe le plan de l'infini suivant une droite du complexe, il faut et il suffit qu'il passe par un certain point à l'infini, c'est-à-dire qu'il soit parallèle à une direction fixe de droites.

Direction principale.

Appelons *direction principale* cette direction. Toutes les droites parallèles à cette direction coupent le plan de l'infini au pôle de ce plan, chacune de ces droites se trouve ainsi être la conjuguée d'une droite du plan de l'infini, et réciproquement toute droite D de l'infini a pour conjuguée une parallèle à la direction principale du complexe.

Diamètres.

Toute droite parallèle à la direction principale s'appelle un *diamètre*. On peut dire, d'après ce qui précède, que tout diamètre est le lieu des foyers d'une famille de plans parallèles, et réciproquement, les foyers d'une famille de plans parallèles sont sur un diamètre.

De même, pour qu'un plan ait son pôle à l'infini, il faut et il suffit qu'il soit parallèle à la direction principale. Dans un tel plan les droites du complexe sont parallèles.

THÉORÈME VI. — *Le plan mené par une droite* D *parallèlement à sa conjuguée* Δ *est parallèle à la direction principale.*

En effet, ce plan a son pôle à l'infini sur Δ; il contient donc le pôle du plan de l'infini.

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

Les projections de deux droites conjuguées sur un plan normal à la direction principale sont deux droites parallèles.

Plans principaux.

On appelle quelquefois *plan principal* tout plan normal à la direction principale. Le lieu des pôles des plans principaux est un diamètre que l'on appelle l'*axe central* du complexe.

Axe central.

THÉORÈME VII. — *Toute droite qui coupe à angle droit l'axe central fait partie du complexe.*

En effet, le plan principal mené par cette droite a son pôle au point où cette droite coupe l'axe central.

THÉORÈME VIII. — *La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées coupe à angle droit l'axe central.*

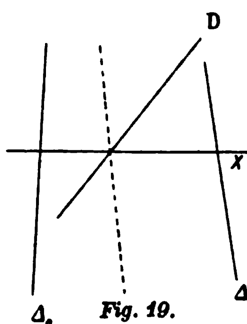


Fig. 19.

En effet, soit Δ_0 l'axe central et X la perpendiculaire commune à Δ_0 et à une droite quelconque D; cette droite X fait partie du complexe d'après le théorème précédent; elle coupe donc la conjuguée Δ de D (théorème III). Le plan mené par D parallèlement à l'axe central est normal à la perpendiculaire X; or, d'après le théorème VI, ce plan est aussi parallèle à Δ. Donc Δ qui coupe X, coupe cette droite à angle droit.

Applications à la statique graphique.

Nous avons déjà remarqué que les projections de deux droites conjuguées sur un plan principal sont parallèles. Soit, d'après cela, une pyramide Σ de sommet O ayant pour base un polygone ABCDE dans un plan π. La figure réciproque sera une pyramide Σ' de sommet O' et de base A'B'C'D'E' dans un plan π'. Le plan π' sera le plan polaire du point O et les droites A'B', B'C' ... seront les conjuguées des arêtes de la pyramide Σ issues du sommet O; le sommet O' de Σ' sera le pôle du plan π, et les arêtes de Σ' issues de O' seront les conjuguées des droites AB, BC, ... Cela posé, projetons l'ensemble de ces deux pyramides sur un plan principal; nous obtiendrons d'abord deux polygones $abcde$, $a'b'c'd'e'$ et deux points o, o'; les droites oa, ob, oc, od, oe, projections des arêtes de Σ, seront parallèles aux côtés $a'b'$, $b'c'$, ... du second polygone et les droites $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, ... seront parallèles aux côtés du premier polygone.

Nous obtenons donc dans le plan ces deux configurations réciproques remarquables qui résultent de la considération simultanée du polygone funiculaire et du polygone de Varignon, lorsque les forces agissantes sont dirigées vers un point fixe.

Cette remarque est l'origine d'une série d'importantes applications de la théorie des complexes linéaires à la statique graphique (¹).

(¹) L. Cremona, *Les Figures réciproques en statique graphique.*

Application de la théorie des complexes aux systèmes de segments.

17. Arrivons maintenant aux applications des complexes linéaires à la théorie des systèmes de segments.

Axes de moment nul.

THÉORÈME I. — *Les axes de moment nul d'un système de segments forment un complexe linéaire.*

L'équation à laquelle satisfont les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν d'un de ces axes est, en effet, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ désignant les coordonnées du système de segments

$$\mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma + \mathcal{X}\lambda + \mathcal{Y}\mu + \mathcal{Z}\nu = 0;$$

elle est du premier degré en α, β, γ, λ, μ, ν, ce qui démontre la proposition énoncée.

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ peuvent être pris arbitrairement. Donc tout complexe linéaire peut, réciproquement, être défini comme le complexe des axes de moment nul d'un système de segments.

On peut donner de cette proposition une démonstration purement géométrique.

Il est évident que les axes de moment nul forment un complexe. Démontrons qu'il est linéaire.

Soient P un point de l'espace, $\overline{PG}$ le moment résultant du système de segments en ce point; pour qu'un axe Δ issu de P ait son moment nul, il faut et il suffit que la projection de $\overline{PG}$ sur cet axe soit nulle, c'est-à-dire que Δ soit dans le plan π normal à $\overline{PG}$.

Le cône du complexe est donc le plan π; et, par suite, le complexe est linéaire.

THÉORÈME II. — La démonstration précédente prouve en même temps que *le plan focal d'un point dans le complexe des axes de moment nul s'obtient en menant le plan normal en* P *au moment résultant du système au point* P.

THÉORÈME III. — *Si deux segments* $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ *forment un système équivalent à un système de segments, les droites qui les portent et dont l'une peut être arbitrairement choisie, forment un couple de*

droites conjuguées, relativement au complexe des axes de moment nul du système.

En effet, tout axe qui coupe $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ est de moment nul; donc tout plan qui passe par $\overline{S}_1$ coupe $\overline{S}_2$ en son propre foyer.

La théorie des droites conjuguées est donc celle de la réduction à deux segments du système de segments proposé.

THÉORÈME IV. — *Si l'on a réduit un système de segments à un segment unique* $\overline{S}$ *et à un couple, la droite qui porte le segment* $\overline{S}$ *est un diamètre du complexe des axes de moment nul du système.*

Supposons, en effet, qu'on ait réduit le système de segments à un segment unique $\overline{S}$ porté par une droite Δ et à un couple situé dans un plan π; soit O le point où Δ perce le plan π. Tout axe issu de O dans le plan π est de moment nul, car le moment de $\overline{S}$ et le moment du couple, par rapport à cet axe, sont séparément nuls; donc O est le foyer du plan π. Si le plan π se meut parallèlement à lui-même, le couple ne change pas, le point O décrit la droite Δ, qui se trouve ainsi être le diamètre conjugué de cette direction de plans.

Enfin la propriété des diamètres d'être parallèles correspond à la propriété qu'a le segment unique S de demeurer équipollent à lui-même. On reconnaît en même temps que l'*axe du complexe coïncide avec l'axe central de Poinsot;* il suffit pour cela de supposer que le plan π devient normal à l'axe Δ.

Propriétés métriques.

La considération des segments permet d'établir aisément plusieurs propriétés métriques des complexes.

Prenons par exemple pour axe des z l'axe central, les coordonnées du système de segments sont alors

$$\mathcal{X}=0,\quad \mathcal{Y}=0,\quad \mathcal{Z}=\mathcal{R},$$
$$\mathcal{L}=0,\quad \mathcal{M}=0,\quad \mathcal{N}=\mathcal{G}=\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}}.$$

Correspondance entre deux droites conjuguées.

Soient deux droites conjuguées; prenons pour axe Ox leur perpendiculaire commune qui coupe aussi à angle droit l'axe central; prenons Oy perpendiculaire à Ox et Oz. Appelons X, Y, Z, X′, Y′, Z′ les projections des deux segments portés par les droites conjuguées D, Δ considérées et qui forment un système équivalent au système proposé; soient enfin x, x' les abscisses des points où D, Δ coupent Ox.

Les moments des deux segments par rapport aux trois axes de coordonnées sont

$$(0, -xZ, xY) \quad (0, -x'Z', x'Y'),$$

puisque $X = X' = 0$. Les équations d'équivalence se réduisent donc à celles-ci :

$$Y + Y' = \mathcal{Y} = 0, \quad Z + Z' = \mathcal{R},$$
$$-xZ - x'Z' = \mathcal{M} = 0, \quad xY + x'Y' = \mathcal{G} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}}.$$

Appelons λ, λ' les tangentes des angles des droites D, Δ avec l'axe Oz, on a

$$\lambda = \frac{Y}{Z}, \quad \lambda' = \frac{Y'}{Z'},$$

et les formules précédentes nous donnent

$$\lambda x' = \lambda' x = -\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{R}} = -\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}^2} = -h,$$

où h est le paramètre défini à la page 26.

Ces formules expriment complètement la correspondance entre deux droites conjuguées et permettent d'en construire une quand on connaît l'autre.

Correspondance entre les points d'une droite du complexe et leurs plans polaires.

Lorsqu'un point décrit une droite du complexe, son plan polaire tourne autour de cette droite; nous allons chercher quelle est la loi de correspondance entre le plan et le point.

Soit une droite du complexe que nous prendrons pour axe Oz et soit Ox la perpendiculaire commune à Oz et à l'axe central.

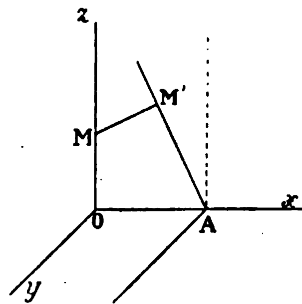


Fig. 20.

Prenons sur Oz à la hauteur ζ un point M, la perpendiculaire MM' menée de M à l'axe du complexe fait partie du complexe (th. VII, n° 16); le plan OMM' est le plan polaire de M. Soit p la distance OA de Oz et de l'axe du complexe, θ leur angle, les équations de l'axe sont

$$(1) \quad x = p, \quad y \cos\theta - z \sin\theta = 0.$$

Le plan mené par M perpendiculairement à l'axe central a pour équation

$$(2) \qquad y \sin\theta + (z - \zeta)\cos\theta = 0.$$

Ce plan coupe l'axe central en M'; on a immédiatement l'équation du plan OMM' en formant une combinaison homogène en x, y des équations (1) et (2); on trouve ainsi

$$y = \mu x$$

où

$$\mu = \frac{\sin\theta\cos\theta}{p}\zeta.$$

Le point M *et son plan polaire déterminent donc sur la droite* Oz *une correspondance homographique,* dans laquelle le point à l'infini correspond au plan mené par la droite parallèlement à l'axe central. Le plan perpendiculaire au précédent a pour pôle le pied O de la perpendiculaire commune à l'axe central et à la droite proposée. Le paramètre de distribution a pour expression.

$$k = \frac{p}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Si l'on se rappelle alors que l'on a (n° 13, p. 39)

$$p \operatorname{tg}\theta = -h,$$

on peut simplifier et écrire

$$k = -\frac{h^2 + p^2}{h}.$$

Droites perpendiculaires à leurs conjuguées.

Les axes de moment nul ne sont pas les seules droites remarquables qui interviennent dans la théorie des segments; les droites rectangulaires avec leurs conjuguées jouent aussi un rôle important. Ces droites forment un complexe du second degré.

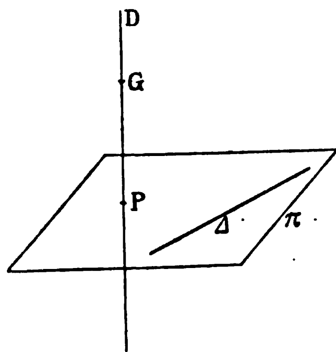


Fig. 21.

Considérons un point P de l'espace et soit $\overline{PG}$ le moment résultant du système au point P; appelons D la droite qui porte $\overline{PG}$; cette droite D est, nous le savons, la normale au plan focal de P; sa conjuguée Δ est dans ce plan focal, donc Δ est rectangulaire avec D.

Réciproquement, soient D, Δ deux droites conjuguées rectangulaires ; menons par Δ un plan normal à D et coupant D au point P.

Le point P est le foyer du plan ΔP, donc D est normale en P au plan focal de ce point P. Ainsi *les droites rectangulaires avec leurs conjuguées ne sont autres que les droites qui portent les moments résultants relatifs à tous les points de l'espace.*

Ces droites dépendent de trois paramètres, elles forment bien un complexe dont nous allons déterminer l'ordre.

Courbe du complexe.

Soit un plan π, son foyer O, la normale D_0 en O à ce plan et la conjuguée Δ_0 de D_0 qui est une droite du plan π. Cherchons toutes les droites du plan π rectangulaires avec leur conjuguée. Soit Δ l'une d'elles, sa conjuguée D passe par le point O. Menons par D un plan φ normal à Δ, qui coupe Δ en son pôle Q. Le plan φ étant normal à Δ est rectangulaire avec le plan π, il contient donc la normale D_0 en O à ce plan. Mais alors, puisque le plan φ passe par D_0 son pôle Q est sur la droite Δ_0 polaire de D_0. La droite Δ_0 est ainsi le lieu des projections du point O sur les tangentes à la courbe enveloppe des droites du complexe dans le plan π. Cette courbe est donc une parabole dont O est le foyer et Δ_0 la tangente au sommet.

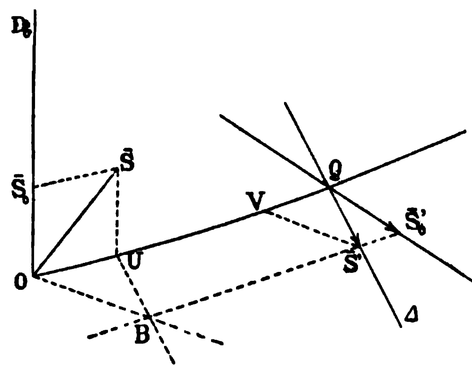


Fig. 22.

La courbe du complexe étant de deuxième classe, il en résulte que le cône du complexe est du deuxième degré. Cette propriété peut d'ailleurs être établie directement.

Cône du complexe.

Soient $\overline{S_0}$, $\overline{S'_0}$ les deux segments portés par D_0 et Δ_0 qui sont équivalents au système de segments considéré.

Soient, de même, $\overline{S}$, $\overline{S'}$ les segments portés par D et Δ équivalents à ce même système.

Les projections de $\overline{S}$ et $\overline{S'}$ sur un axe quelconque ont même somme que les projections de $\overline{S_0}$, $\overline{S'_0}$. Projetons sur D_0; S' et S'_0 ont des projections nulles; on voit donc que le segment $\overline{S}$ se projette sur D_0 suivant le segment $\overline{S_0}$. Le point S, extrémité du segment $\overline{S}$, se meut

dans le plan normal à D_0 mené par S_0. Projetons S en U sur le plan π. Cette projection se fait sur la droite OQ; soit $\overline{QV}$ un segment égal et opposé à $\overline{OU}$, $\overline{QS'_0}$ le segment $\overline{S'_0}$ porté par Δ_0 et $\overline{QS'}$ la somme géométrique de $\overline{QV}$ et de $\overline{QS'_0}$, ce segment $\overline{QS'}$ est justement le segment $\overline{S'}$. En effet, si aux segments $\overline{S_0}$, $\overline{S'_0}$ on surajoute les segments opposés égaux $\overline{OU}$, $\overline{QV}$, on a un système équivalent au système des segments $\overline{S_0}$, $\overline{S'_0}$; mais $\overline{OS}$ est la somme géométrique de $\overline{OS_0}$ et de $\overline{OU}$, QS' celle de $\overline{QV}$ et de $\overline{QS'_0}$. Les segments $\overline{OS}$ et $\overline{QS'}$ forment donc un système équivalent au système proposé. Donc, enfin, $\overline{QS'}$ est bien le segment $\overline{S'}$ qui forme avec $\overline{S}$ un système équivalent à $\overline{S_0}$, $\overline{S'_0}$. $\overline{QS'}$ est ainsi porté par la droite Δ.

Menons par O la parallèle OB à Δ_0 et prolongeons S'_0S' jusqu'en B, puis menons BU. Les deux triangles OUB et VQS' sont égaux. En effet, OB $\rightleftharpoons$ VS', car OVS'B est un parallélogramme, le côté OU égale le côté QV, enfin, les angles BOU, S'VQ sont égaux, donc l'angle OUB est égal à l'angle VQS' qui est droit. L'angle OUB étant droit, le lieu du point U est un cercle décrit sur OB comme diamètre; ce cercle est fixe, car $\overline{OB} = \overline{S'_0}$. On voit alors que le point S dans l'espace décrit ce même cercle transporté parallèlement à lui-même à une hauteur OS_0 au-dessus du plan π; la droite D décrit ainsi le cône qui a pour sommet O et pour base le cercle lieu du point S. C'est le cône du complexe relatif au point O.

Le plan D_0OB est un plan principal de ce cône, soit OC la seconde génératrice contenue dans ce plan. OC est parallèle à l'axe central, car ce segment est équipollent à la résultante de translation, comme on le voit immédiatement, puisque OB est $\overline{S'_0}$ et $\overline{BC}$, $\overline{S_0}$. Un premier plan cyclique du cône étant normal à OD_0, le second plan cyclique est normal à OC.

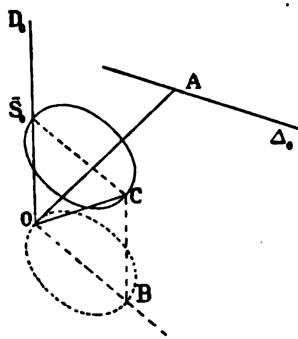


Fig. 23.

Ainsi les plans cycliques du cône sont parallèles d'une part au plan π lui-même, et en second lieu aux plans principaux du complexe. Tous les cônes de ce complexe ont ainsi en commun une même direction de sections circulaires.

CHAPITRE II

Mouvement. — Vitesse. — Accélération.

Mouvement.

Définitions. **19.** On dit qu'un point M est *en mouvement* par rapport à un second point M′ lorsque la distance de ces deux points varie avec le temps.

Si cette distance ne varie pas avec le temps, on dit que les points M, M′ forment un système invariable.

Plus généralement on appelle *système invariable* un ensemble de points dont les distances réciproques restent invariables quand le temps varie.

Un point dont les distances aux points d'un système invariable Σ varient avec le temps, est dit *mobile* par rapport au système Σ. La notion de mouvement apparaît donc comme essentiellement relative en ce sens qu'elle suppose la comparaison du point mobile à un système invariable.

Le système de comparaison le plus commode consiste en un trièdre trirectangle. Un point M est mobile par rapport à un trièdre trirectangle T si ses coordonnées xyz, relatives au trièdre T, varient avec le temps. Si ces coordonnées sont, au contraire, invariables, nous dirons qu'il est *lié invariablement* au trièdre; si l'on donne à x, y, z toutes les valeurs constantes possibles, on obtient une infinité de points qui remplissent tout l'espace; mais pour marquer que ces points sont liés invariablement au trièdre T, nous dirons de l'espace qu'ils remplissent qu'il est lié invariablement au trièdre T; appelons E cet espace.

Un point M mobile par rapport à un trièdre T coïncide à chaque instant avec un point P de l'espace E, c'est-à-dire avec un point P lié invariablement au trièdre T. Le lieu de ces points P constitue dans l'espace E une courbe appelée la *trajectoire* du point mobile M.

Vitesse.

Définition algébrique.

Soit P la position du mobile M sur la trajectoire et s l'arc de cette trajectoire compté à partir d'une origine fixe et dans un sens déterminé. Cet arc s est une fonction du temps qui, dans tous les problèmes que l'on a à étudier, admet une dérivée. Cette dérivée est une quantité algébrique; elle a reçu le nom de *vitesse*.

La vitesse est positive ou négative, selon que le mouvement a lieu dans le sens des arcs croissants ou décroissants.

On pourrait, dans bien des cas, s'en tenir à cette définition de la vitesse; mais dans d'autres elle serait insuffisante et incomplète. On introduit une notion nouvelle, celle de la *vitesse géométrique*.

Définition géométrique.

Soit O un point fixe (c'est-à-dire lié invariablement au trièdre T); nous pouvons supposer que O est l'origine du trièdre. Le segment $\overline{OM}$, dont l'origine O est fixe, suit le mouvement du point M en ce sens que M est toujours l'extrémité de ce segment. Nous pouvons dire que $\overline{OM}$ est une *fonction géométrique* du temps. Soit P la position du mobile M à l'époque t, P′ sa position à l'époque $t + \Delta t$. Le segment $\overline{PP'}$ représente l'accroissement géométrique du segment $\overline{OP}$ quand le temps passe de t à $t + \Delta t$; on a, en effet,

$$\overline{OP'} = \overline{OP} + \overline{PP'}.$$

Soit $\overline{PQ}$ le segment obtenu en divisant $\overline{PP'}$ par Δt, c'est-à-dire le segment qui a même sens que $\overline{PP'}$ et dont la longueur est égale au quotient par Δt de la longueur de $\overline{PP'}$. On peut observer que ce segment $\overline{PQ}$ est dirigé *dans le sens du mouvement* (1).

(1) Voici ce qu'il faut entendre par là. Soit π le plan normal en P à la trajectoire, ce plan divise l'espace en deux régions, l'une R où est le mobile avant l'époque t, l'autre R′ où il se trouve après l'époque t; le point P′ est dans cette région R′. Tout segment issu de P et situé dans la région R′ est dit avoir le sens du mouvement. Des deux axes portés par la tangente il y en a un qui a le sens du mouvement et l'autre le sens opposé; le premier est celui dont le segment unitaire, issu de P, est dirigé dans la région R′.

Ceci posé, si Δt tend vers zéro, la corde PP′Q tend vers la tangente à la trajectoire au point P; et la limite du segment $\overline{PQ}$ est un segment $\overline{PV}$ porté par cette tangente et *dirigé dans le sens du mouvement.* La longueur de $\overline{PV}$ est la limite du rapport

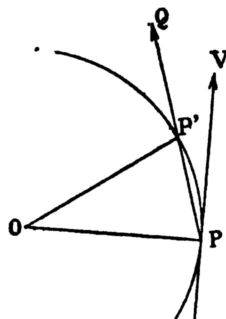


Fig. 24.

$$\frac{\text{longueur PP}'}{\Delta t},$$

qui est égale à la limite de

$$\frac{\text{longueur arc PP}'}{\Delta t},$$

c'est-à-dire à la valeur absolue de $\dfrac{ds}{dt} = v$.

Ainsi le segment PQ a pour limite un segment $\overline{PV}$ dirigé dans le sens du mouvement sur la tangente à la trajectoire et dont la longueur est égale à la valeur absolue de la vitesse.

Ce segment $\overline{PV}$ est la *vitesse géométrique* du point M.

Supposons que l'on ait choisi sur la trajectoire un sens positif pour les arcs, et soit Δ l'axe qui, sur cette tangente, a le sens des arcs croissants. Si le mouvement a lieu dans le sens des arcs croissants, v a une valeur positive, et l'axe Δ est dirigé dans le sens du mouvement; le segment $\overline{PV}$ a donc le sens de l'axe Δ et v est justement le nombre qui le mesure sur cet axe.

Supposons, au contraire, que le mouvement ait lieu en sens inverse des arcs croissants, alors $v < 0$, et de plus le segment $\overline{PV}$ a un sens opposé à celui de l'axe Δ; le nombre qui le mesure a pour valeur absolue la valeur absolue de v et il est négatif, donc puisque $v < 0$, la valeur de v est ce nombre lui-même. On peut dire :

Sur l'axe choisi sur la tangente à la trajectoire dans le sens des arcs croissants, le segment vitesse $\overline{PV}$ *est mesuré par la valeur algébrique de la vitesse* $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Projection de la vitesse en coordonnées rectangulaires.

20. On peut en conclure que si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire menée dans le sens des arcs croissants, les projections de la vitesse $\overline{PV}$ auront pour expressions

$$\alpha.v, \quad \beta.v, \quad \gamma.v.$$

Mais on sait que

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds};$$

les projections de la vitesse sont donc

$$\alpha v = \frac{dx}{ds} \cdot v = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt};$$

et de même

$$\beta v = \frac{dy}{dt}, \quad \gamma v = \frac{dz}{dt}.$$

Projetons à chaque instant le mobile M en M′ sur l'axe Ox; nous obtenons ainsi un mobile M′ qui a Ox comme trajectoire; l'arc de cette trajectoire est précisément x; la vitesse $\overline{P'V'}$ du mobile M′ (P′ est la projection de P) est portée par Ox et est mesurée par $\frac{dx}{dt}$; ce segment $\overline{P'V'}$ est donc la projection de $\overline{PV}$ sur l'axe Ox. De là ce théorème :

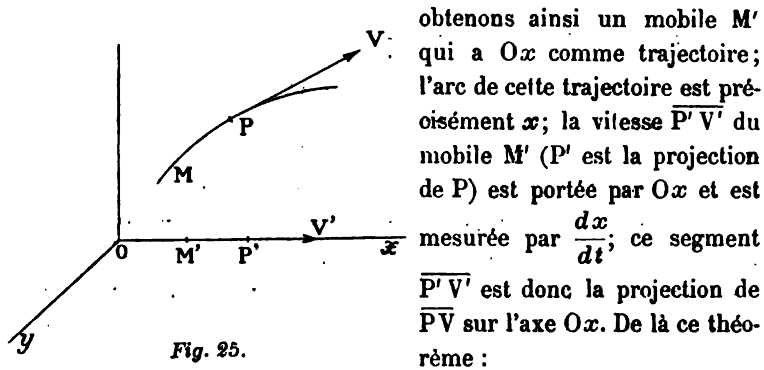


Fig. 25.

Le segment qui est la projection de la vitesse $\overline{PV}$ *d'un mobile* M *sur un axe est aussi la vitesse* $\overline{P'V'}$ *du point* M′, *projection du mobile* M *sur cet axe.*

La même démonstration s'applique à la projection sur un plan. En effet, soit M′ la projection du mobile M sur le plan des xy. Les coordonnées de la position P′ occupée par le mobile M′ à l'époque t sont évidemment x, y, 0; les projections de sa vitesse $\overline{P'V'}$ sont donc

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad 0;$$

il en résulte bien que $\overline{P'V'}$ est la projection du segment $\overline{PV}$ sur le plan des xy.

Comme application, cherchons l'expression de la vitesse d'un point mobile dont les coordonnées sont des fonctions connues du temps.

Puisque $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont les projections du segment $\overline{PV}$ sur les axes rectangulaires, on a évidemment

$$\text{longueur } \overline{PV} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

d'où

$$v = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2};$$

on choisit le signe + ou le signe — selon que le mouvement a lieu ou non dans le sens des arcs croissants.

Vitesse en coordonnées curvilignes.

Au lieu de coordonnées rectangulaires rectilignes, on peut faire usage de tout autre système de coordonnées pourvu que les bases de ces coordonnées soient invariablement liées au système invariable considéré.

Supposons que l'on ait pris des coordonnées curvilignes quelconques définies par les formules de transformation

$$x = f(q_1, q_2, q_3), \quad y = f'(q_1, q_2, q_3), \quad z = f''(q_1, q_2, q_3).$$

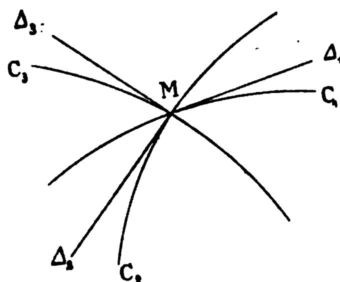


Fig. 26.

Si l'on ne fait varier que q_1, on a une courbe C_1; de même en faisant varier isolément q_2, puis q_3, on aura deux autres courbes C_2, C_3 : ce sont les *courbes de coordonnées*. Les tangentes à ces courbes, prises dans le sens des paramètres croissants, forment en chaque point de l'espace un trièdre; appelons Δ_1, Δ_2, Δ_3 ces tangentes. Effectuons un déplacement suivant Δ_1, dont les projections dx, dy, dz sur les axes fixes Ox, Oy, Oz seront données par les formules

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, \quad dx = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1;$$

la longueur du déplacement a pour expression, dq_1 étant positif,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \cdot dq_1.$$

On en déduit, pour les cosinus directeurs de Δ_1,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{\partial z}{\partial q_1},$$

où l'on a posé

$$\sqrt{A_1} = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

On aura de même les cosinus directeurs de Δ_2 et de Δ_3

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{\partial x}{\partial q_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{\partial y}{\partial q_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{\partial z}{\partial q_2},$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{A_3}}\frac{\partial x}{\partial q_3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{A_3}}\frac{\partial y}{\partial q_3}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{A_3}}\frac{\partial z}{\partial q_3},$$

en posant

$$\sqrt{A_2} = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$
$$\sqrt{A_3} = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Observons que si l'on calcule l'expression $dx^2 + dy^2 + dz^2$ pour un déplacement quelconque, on trouve

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = {} & A_1 dq_1^2 + A_2 dq_2^2 + A_3 dq_3^2 \\ & + 2B_1\, dq_2\, dq_3 + 2B_2\, dq_3\, dq_1 + 2B_3\, dq_1\, dq_2, \end{aligned}$$

où l'on a

$$B_1 = \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3},$$
$$B_2 = \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1},$$
$$B_3 = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}.$$

Les quantités B_1, B_2, B_3 sont nulles si les tangentes Δ_1, Δ_2, Δ_3 forment un trièdre trirectangle; les coordonnées sont alors triplement orthogonales.

Cherchons les expressions des projections de la vitesse d'un point mobile M sur les tangentes au point M aux 3 courbes de coordonnées.

La projection sur Δ_1 est

$$\alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_1 \frac{dz}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{A_1}} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{dz}{dt} \right).$$

Posons

$$2T = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + A_3 q_3'^2 + 2B_1 q_2' q_3' + 2B_2 q_3' q_1' + 2B_3 q_1' q_2',$$

où $q_i' = \dfrac{dq_i}{dt}$; on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3',$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial y}{\partial q_3} q_3',$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial z}{\partial q_3} q_3',$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{dz}{dt} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} \right) q_1' \\
&+ \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} \right) q_2' \\
&+ \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3} \right) q_3' \\
&= A_1 q_1' + B_3 q_2' + B_2 q_3' \\
&= \frac{\partial T}{\partial q_1'},
\end{aligned}$$

donc la projection de la vitesse sur Δ_1 est

$$\frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{\partial T}{\partial q_1'};$$

de même les projections de la vitesse sur Δ_2 et sur Δ_3 sont

$$\frac{1}{\sqrt{A_2}} \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_3}} \frac{\partial T}{\partial q_3'}.$$

Exemples. *Coordonnées polaires dans le plan.* — En coordonnées polaires

dans le plan l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins est

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

On a $2T = r'^2 + r^2\theta'^2$; les lignes de coordonnées sont les cercles ayant l'origine pour centre, et les droites passant par l'origine.

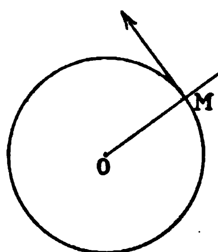


Fig. 27.

Soit OM le rayon vecteur, la projection de la vitesse sur OM est $\frac{\partial T}{\partial r'} = r' = \frac{dr}{dt}$. On donne à cette expression le nom de *vitesse d'élongation*. La tangente à la seconde courbe de coordonnées est la tangente MT au cercle menée dans le sens des θ croissants, la projection de la vitesse sur MT est

$$\frac{1}{+\sqrt{r^2}} \times \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{1}{r} \times r^2\theta' = r\theta' = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Cette projection de la vitesse porte le nom de *vitesse de circulation*.

Coordonnées polaires dans l'espace. — Étudions encore les coordonnées polaires dans l'espace; $\overline{ds^2}$ a pour expression

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2;$$

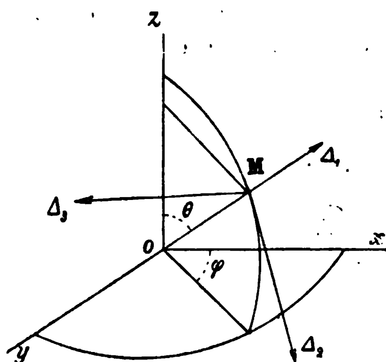


Fig. 28.

les courbes de coordonnées sont le rayon vecteur, les méridiens, les parallèles; appelons Δ_1, Δ_2, Δ_3 les tangentes à ces lignes prises dans le sens de r, θ, φ croissants.

On a

$$2T = r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2\theta\, \varphi'^2$$

d'où pour les projections de la vitesse

sur Δ_1 : $\quad r' = \frac{dr}{dt}$,

sur Δ_2 : $\quad \dfrac{1}{r} \times (r^2\theta') = r\theta' = r\,\dfrac{d\theta}{dt},$

sur Δ_3 : $\quad \dfrac{1}{+\sqrt{r^2 \sin^2 \theta}}\,(r^2 \sin\theta\, \varphi') = r \sin\theta \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}.$

Coordonnées cylindro-polaires. — Soient r, θ les coordonnées polaires dans le plan des xy de la projection du point M sur ce plan, et z la cote de M au-dessus de ce même plan. Les variables r, θ, z constituent le système de coordonnées cylindro-polaires. Les courbes de coordonnées sont la perpendiculaire MN abaissée de M sur Oz, la parallèle MM' à Oz et le cercle de centre N de rayon MN, qui est dans un plan parallèle à xOy. Les axes Δ_1, Δ_2, Δ_3, sont NM, la normale MM' en M au plan MOz, menée dans le sens *dextrorsum* avec OZ, et enfin MM'. On a ici

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2,$$

et l'on trouve pour les projections de la vitesse

$$\text{sur NM :} \qquad \frac{dr}{dt},$$

$$\text{sur MM' :} \qquad r\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$\text{sur MM' :} \qquad \frac{dz}{dt}.$$

Vitesse aréolaire.

On a beaucoup étendu le sens du mot *vitesse;* chaque fois qu'une quantité est variable avec le temps, sa dérivée par rapport au temps peut s'appeler sa vitesse. Un exemple important est fourni par la *vitesse aréolaire.*

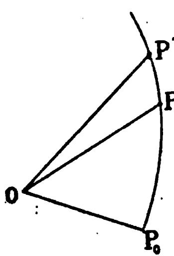


Fig. 29.

Considérons un point M mobile dans un plan, et soit P la position qu'il occupe à l'époque t ; prenons dans le plan un point fixe O. Le vecteur OP balaie une aire qui, comptée à partir de la position $\overline{\mathrm{OP}_0}$ relative à l'époque $t = 0$, a une certaine valeur $\mathcal{A}$ à l'époque t. Quand P vient en P', $\mathcal{A}$ s'accroît d'une quantité $\Delta\mathcal{A}$:

$$\Delta\mathcal{A} = \mathrm{POP'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OP}.\mathrm{OP'}.\sin \mathrm{POP'}.$$

On a

$$\mathrm{OP} = r, \qquad \mathrm{OP'} = r + \Delta r, \qquad \mathrm{POP'} = \Delta\theta,$$

donc

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

et

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Cette expression $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ a reçu le nom de *vitesse aréolaire.*

Si au lieu des coordonnées polaires on introduit les coordonnées rectangulaires x, y, on trouve aisément

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

La considération de la vitesse aréolaire est liée à celle des coordonnées du segment vitesse.

Moments du segment vitesse.

Nous avons vu que les projections de la vitesse sur les axes ont pour expressions

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Les moments du segment vitesse pris par rapport aux axes du trièdre T sont donc

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}.$$

On reconnaît ainsi que *les moments de la vitesse relatifs aux axes* Ox, Oy, Oz *sont les doubles des vitesses aréolaires des projections du mobile sur les plans normaux à ces axes.*

Accélération.

Hodographe.

21. Considérons la position P d'un mobile M à l'époque t et soit $\overline{PV}$ sa vitesse; par un point fixe O menons $\overline{OU}$ équipollent à $\overline{PV}$. Le point U est mobile sauf le cas où $\overline{PV}$ serait constant en grandeur et direction. Mais alors le mouvement du mobile aurait lieu sur une droite avec une vitesse constante; le mouvement serait rectiligne et

uniforme. Ce cas exclu, le point U est mobile; la courbe qu'il décrit est appelée l'*hodographe*.

La vitesse avec laquelle le point U décrit l'hodographe s'appelle l'*accélération*. On appelle plus exactement accélération le segment $\overline{PJ}$ équipollent à la vitesse $\overline{UW}$ du point U sur l'hodographe.

Définition de l'accélération.

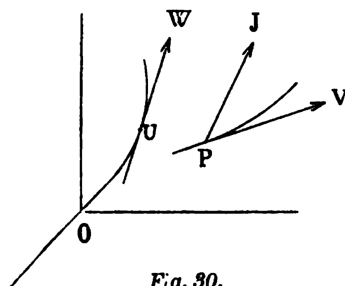


Fig. 30.

THÉORÈME I. — Il résulte immédiatement de cette définition que l'*accélération est dans le plan osculateur en* P *à la trajectoire*.

En effet, la droite OU engendre le cône directeur des tangentes à la trajectoire; l'hodographe est tracée sur ce cône; donc le plan OUW qui contient la génération OU et la tangente UW à l'hodographe est le plan tangent à ce cône. Le plan mené par P parallèlement à ce plan tangent est *par définition* le plan osculateur. Le plan osculateur est donc le plan JPV.

On complète habituellement ce théorème par deux autres que nous démontrerons.

Cherchons auparavant les coordonnées du segment accélération.

Les coordonnées du point U sont évidemment

Coordonnées du segment accélération.

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

donc les projections de $\overline{UW}$ seront

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z'' = \frac{dz'}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Nous obtenons ainsi les projections de l'accélération.

Prenons le point P_1, projection du point P sur Ox, les coordonnées de P_1 sont

$$x, \quad 0, \quad 0;$$

les projections de son accélération sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad 0, \quad 0.$$

L'accélération du point P_1 est, par suite, un segment que l'on peut

obtenir en projetant sur Ox l'accélération du point P. De là ce théorème :

THÉORÈME II. — *L'accélération d'un point* P *se projette sur un axe fixe suivant un segment qui représente l'accélération dans le mouvement sur l'axe de la projection* P_1 *du point* P *sur cet axe.*

Le même théorème s'applique à la projection de l'accélération sur un plan.

Cherchons les expressions des moments du segment accélération.

Le segment $\overline{PJ}$ étant issu de P (x, y, z) et ayant x'', y'', z'' pour projections, ses moments seront

$$yz'' - zy'', \quad zx'' - xz'', \quad xy'' - yx'',$$

ou encore

$$\frac{d(yz' - zy')}{dt}, \quad \frac{d(zx' - xz')}{dt}, \quad \frac{d(xy' - yx')}{dt}.$$

Ainsi, tandis que

$$x', y', z', \quad yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'$$

sont les coordonnées du segment vitesse $\overline{PV}$, les coordonnées du segment accélération sont

$$\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}, \frac{d(yz' - zy')}{dt}, \frac{d(zx' - xz')}{dt}, \frac{d(xy' - yx')}{dt}.$$

Les coordonnées du segment accélération sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées du segment vitesse.

Accélérations de divers ordres.

Menons par O un segment $\overline{OU_1}$ équipollent à $\overline{PJ}$, la vitesse du point U_1 est un segment qui, transporté en M (en $\overline{MJ_1}$), a reçu le nom d'*accélération du second ordre ;* on peut continuer en menant $\overline{OU_2}$ équipollent à $\overline{MJ_1}$, la vitesse de U_2, transportée au point M, est un segment $\overline{MJ_2}$ qui a reçu le nom d'*accélération du troisième ordre,* et ainsi de suite. Ces accélérations n'ont qu'un intérêt théorique, elles interviennent rarement. Il est à remarquer que pour elles le théorème que nous venons de démontrer n'a plus lieu. Les coordonnées de l'accélération d'ordre n ne sont pas les dérivées de celles

de l'ordre $n - 1$. Cela a lieu seulement pour les projections. Les projections de l'accélération d'ordre n sont, en effet, comme on le voit aisément,

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}};$$

mais ses moments sont

$$y\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}} - z\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad z\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} - x\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}, \quad x\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}} - y\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}.$$

Accélération tangentielle et accélération normale.

22. Revenons à l'accélération ordinaire ou du premier ordre dont les projections sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les projections x', y', z' de la vitesse peuvent se représenter par

$$x' = \alpha v, \quad y' = \beta . v, \quad z' = \gamma . v,$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire parcourue dans le sens des arcs croissants, et v la vitesse algébrique prise avec son signe.

On a dès lors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(\alpha v)}{dt} = v \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Appelons R le rayon de première courbure de la trajectoire, α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale dirigée vers le centre de courbure; on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\alpha' v}{R}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\beta' v}{R}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma' v}{R};$$

et par suite

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\frac{dv}{dt} + \alpha'\frac{v^2}{R},$$

et de même

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta\frac{dv}{dt} + \beta'\frac{v^2}{R},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma\frac{dv}{dt} + \gamma'\frac{v^2}{R}.$$

Désignons par J_t la projection de l'accélération sur la tangente; on aura

$$J_t = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt};$$

désignons par J_n la projection de l'accélération sur la normale principale; on aura de même

$$J_n = \alpha'\frac{d^2x}{dt^2} + \beta'\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{v^2}{R}.$$

Calculons la projection de l'accélération sur l'axe du plan osculateur; en appelant α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de cette direction, nous trouverons

$$\alpha''\frac{d^2x}{dt^2} + \beta''\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma''\frac{d^2z}{dt^2} = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\frac{dv}{dt}$$
$$+ (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')\frac{v^2}{R} = 0.$$

De là ces théorèmes :

THÉORÈMES III, IV, V. — 1° *La projection de l'accélération sur la tangente a pour expression*

$$J_t = \frac{dv}{dt}.$$

2° *La projection de l'accélération sur la normale principale a pour expression*

$$J_n = \frac{v^2}{R}.$$

3° *La projection de l'accélération sur la binormale est nulle.*

Ce dernier théorème revient à la proposition déjà établie d'après laquelle l'accélération est dans le plan osculateur.

La projection de l'accélération sur la tangente a reçu le nom d'*accélération tangentielle*.

La projection de l'accélération sur la normale principale s'appelle l'*accélération normale*.

On observera que cette dernière accélération $\frac{v^2}{R}$ est essentiellement positive; elle est donc toujours dirigée vers le centre de courbure. De là cette remarque importante :

L'accélération totale est toujours du même côté de la tangente que le centre de courbure.

Si, en effet, le segment $\overline{PJ}$ et le centre de courbure C étaient de part et d'autre de la tangente, la projection de $\overline{PJ}$ sur la normale principale serait de sens contraire à la direction du segment $\overline{PC}$.

Projections de l'accélération sur les tangentes aux courbes de coordonnées.

23. On peut, en ce qui concerne l'accélération, se poser un problème analogue à celui que nous avons traité pour la vitesse et chercher ses projections sur les tangentes aux courbes des coordonnées supposées quelconques.

Reprenons les notations du nº 20. La projection sur la tangente Δ_1 de l'accélération aura pour expression

$$\alpha_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

Calculons la quantité entre parenthèses; on a identiquement

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{d^2z}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{dz}{dt} \right) \\ &- \left(\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{dq}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right); \end{aligned}$$

mais la quantité

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{dz}{dt}$$

a été déjà calculée à propos de la vitesse et trouvée égale à $\frac{dT}{dq_1'}$. Reste le terme soustractif; pour le calculer considérons l'expression

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{où} \quad \left(x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt} \right);$$

on a

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = x' \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_1};$$

d'autre part,

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3,$$

d'où

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_3} q'_3,$$

expression qui peut s'écrire aussi

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right);$$

on a donc

$$x' \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial y_1}$$
$$= \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_1}.$$

D'où finalement cette expression de la projection de l'accélération sur l'axe Δ_1,

$$\frac{1}{\sqrt{A_1}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right],$$

et deux expressions analogues pour les projections sur les deux autres tangentes Δ_2, Δ_3.

Ce qu'il faut remarquer dans cette expression, c'est qu'elle ne met en jeu que la forme du ds^2 de l'espace rapporté aux coordonnées q_1, q_2, q_3.

Applications. — Appliquons aux *coordonnées polaires dans le plan.*

$$2T = r'^2 + r^2\theta'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = r\theta'^2,$$

on a donc pour expression des projections de la vitesse sur le rayon vecteur et la tangente au cercle coordonné

$$\frac{dr'}{dt} - r\theta'^2 = r'' - r\theta'^2; \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta').$$

Pareillement en *coordonnées polaires dans l'espace*, on trouve

$$2T = r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2,$$

et pour les projections de l'accélération

$$\text{sur } \Delta_1 : \quad r'' - r(\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2)$$

$$\text{sur } \Delta_2 : \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') - r^2 \sin \theta \cos \theta \varphi'^2,$$

$$\text{sur } \Delta_3 : \quad \frac{1}{r \sin \theta}\frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \varphi').$$

En coordonnées *cylindro-polaires* on a

$$2\,T = r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2,$$

les tangentes sont : Δ_1 le rayon vecteur, Δ_2 la tangente au cercle coordonné, Δ_3 la parallèle à Oz.

Les projections de l'accélération ont pour expressions

$$\text{sur } \Delta_1 : \quad r'' - r\theta'^2,$$

$$\text{sur } \Delta_2 : \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta'),$$

$$\text{sur } \Delta_3 : \quad z''.$$

24. Donnons quelques exemples de mouvements simples :

Mouvement rectiligne et uniforme.

Le plus simple de tous est le mouvement rectiligne et uniforme, qui est celui d'un point qui se meut sur une droite avec une vitesse constante v. De l'équation

$$\frac{ds}{dt} = v$$

on tire

$$s = vt + \text{constante},$$

ou en comptant le chemin rectiligne à partir de la position occupée à l'époque $t = 0$ par le mobile,

$$s = vt.$$

La longueur et la direction du segment vitesse sont invariables, en sorte que dans ce cas le point U, qui décrit en général l'hodographe, est immobile. L'accélération est nulle; et réciproquement, si l'accélération est nulle, U est immobile et la vitesse a une grandeur et un sens invariables.

Cette propriété du mouvement rectiligne uniforme d'avoir une accélération nulle rend très important son rôle en dynamique.

Déviation. Considérons deux positions consécutives P, P′ d'un mobile sur sa trajectoire, positions qui correspondent aux époques t et $t + \Delta t$. Soit PV la tangente en P à la trajectoire et v la vitesse que possède le mobile lors de son passage en P, vitesse que nous supposerons géométriquement représentée par le segment $\overline{PV}$. Si pendant le temps Δt le mobile avait conservé la vitesse v en se déplaçant sur la tangente, il serait parvenu en un point S de cette droite tel que $\overline{PS}$ et le segment $\overline{PV}$ aient le même sens et que la longueur de $\overline{PS}$ soit égale à celle de $\overline{PV}$ multipliée par Δt,

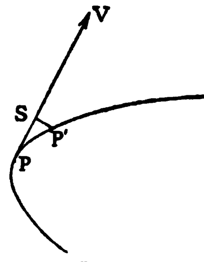


Fig. 31.

$$\text{long PS} = \text{long PV} \times \Delta t.$$

Les projections de $\overline{PV}$ étant x', y', z', celles de $\overline{PS}$ seront donc $x'\Delta t$, $y'\Delta t$, $z'\Delta t$ et les coordonnées du point S seront

$$x + x'\Delta t, \quad y + y'\Delta t, \quad z + z'\Delta t.$$

Mais le mobile se meut en réalité sur la trajectoire; il est en P′ et non en S; $\overline{SP'}$ est la *déviation* entre le mouvement effectif et le mouvement rectiligne et uniforme que nous venons de définir. Calculons cette déviation $\overline{SP'}$ ou plutôt ses projections sur Ox, Oy, Oz. Les coordonnées de P′ sont $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, on a donc

$$\begin{aligned}\text{proj}_x \overline{SP'} &= (x + \Delta x) - (x + x'\Delta t)\\ &= \Delta x - x'\Delta t;\end{aligned}$$

or

$$\Delta x = x'\Delta t + x''\frac{\Delta t^2}{2} + x'''\frac{\Delta t^3}{6} + \dots,$$

donc

$$\text{proj}_x \overline{SP'} = \Delta x - x'\Delta t = x''\frac{\Delta t^2}{2} + \dots,$$

et de même

$$\text{proj}_y \overline{SP'} = \Delta y - y'\Delta t = y''\frac{\Delta t^2}{2} + \dots,$$

$$\text{proj}_z \overline{SP'} = \Delta z - z'\Delta t = z''\frac{\Delta t^2}{2} + \dots.$$

En conséquence $\overline{SP'}$ est égal, au troisième ordre près, au produit de l'accélération $\overline{MJ}$ par $\frac{\Delta t^2}{2}$; ou encore la limite du quotient géométrique

$$\frac{\overline{SP'}}{\frac{\Delta t^2}{2}}$$

est égale à $\overline{MJ}$.

Ce qui veut dire que $\overline{SP'}$ a pour direction et sens limites la direction et le sens de l'accélération et que sa longueur divisée par $\frac{1}{2}\Delta t^2$ a pour limite la longueur même de l'accélération.

On voit que l'existence de la déviation fait qu'un mouvement n'est pas rectiligne et uniforme, car dans le mouvement rectiligne et uniforme et dans ce mouvement seul elle est constamment nulle.

Mouvement uniforme en général. On donne généralement le nom de *mouvement uniforme* à tout mouvement dont la vitesse v est constante. Dans ce cas, l'arc parcouru dans le temps t a pour expression

$$s = vt.$$

L'accélération tangentielle est nulle, et l'accélération se réduit au segment $\frac{v^2}{R}$ porté par la normale principale.

Mouvement circulaire uniforme.

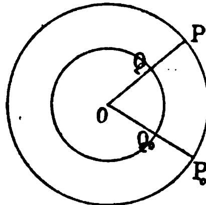


Fig. 32.

Un cas simple et important est celui du mouvement uniforme d'un point sur une circonférence de cercle.

Soit P_0 la position initiale, c'est-à-dire la position du mobile à l'époque $t = 0$; P la position à l'époque t, la vitesse v étant constante, l'arc $P_0P = s$ est égal à vt,

$$s = vt.$$

Considérons le cercle de rayon 1 concentrique au cercle proposé, Q_0, Q les points de ce cercle sur les rayons aboutissant en P_0 et P; appelons θ l'arc Q_0Q qui mesure l'angle Q_0OQ. On a évidemment, R étant le rayon,

$$s = R\theta,$$

d'où résulte

$$R\theta = vt$$

ou

$$\theta = \frac{v}{R} t.$$

L'arc θ parcouru par le point Q est proportionnel au temps. La vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ du point Q sur le cercle qu'il décrit est constante et égale à $\frac{v}{R}$; c'est ce que l'on appelle la *vitesse angulaire* du point P. Désignons par ω cette vitesse angulaire; on a

$$\omega = \frac{v}{R},$$

d'où $v = \omega R$, en sorte que deux points animés d'une même vitesse angulaire sur deux cercles de rayons différents ont leurs vitesses proportionnelles aux rayons des cercles qu'ils décrivent.

Cherchons l'accélération de ce mouvement : L'accélération normale subsiste seule et est égale à

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Donc :

Lorsqu'un point décrit un cercle d'un mouvement uniforme, il possède une accélération dirigée vers le centre égale à $\omega^2 R$.

Mouvement oscillatoire.

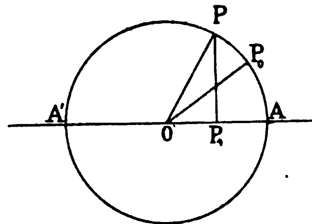


Fig. 33.

Pour cette raison cette accélération est quelquefois appelée *centripète*.

Soit toujours un point M décrivant un cercle d'un mouvement uniforme et appelons AA' un diamètre du cercle. Comptons les arcs à partir de A dans le sens du mouvement; soient P la position du mobile à l'époque t et φ l'angle AOP.

Si φ_0 est la valeur de φ à l'instant initial $t = 0$, on a

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

ω étant la vitesse angulaire. On trouve alors, en projetant P en P_1 sur OA et désignant par x la distance OP_1 comptée positivement de O vers A,

$$x = R \cos \varphi = R \cos (\omega t + \varphi_0).$$

La nature du mouvement de P_1 est remarquable. Il est périodique, car $\cos \varphi$ variant de $+1$ à -1, x varie de $+R$ à $-R$, et le point P_1 oscille de A à A'.

Lorsque le point P décrit la circonférence, il passe par deux positions pour lesquelles sa projection est en P_1, le point P et le point P' symétrique du précédent par rapport à AA'. Les valeurs de φ correspondantes sont, à un multiple de 2π près, égales et de signes contraires; il en résulte que les vitesses de P_1 relatives à deux passages consécutifs sont aussi égales et de signes contraires puisque

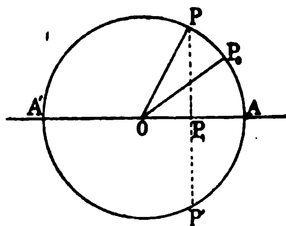


Fig. 34.

$$\frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \varphi.$$

La durée d'une oscillation complète est $\frac{2\pi}{\omega} = T$, en sorte qu'en remplaçant ω par sa valeur tirée de cette équation, on peut écrire

$$x = R \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right).$$

Les mouvements de cette forme se présentent souvent en physique; T a reçu le nom de *période*.

Mouvement uniforme sur une hélice.

Considérons encore une hélice ayant OZ pour axe. Supposons que par un tour complet, de gauche à droite, pour un observateur traversé par OZ des pieds à la tête, le point P s'élève de la quantité $2\pi h$; a est le rayon du cercle de base.

Les équations qui représentent l'hélice sont

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = h\theta. \end{cases}$$

Cherchons à représenter le mouvement uniforme d'un point sur cette hélice.

On a d'abord

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + h^2)\, d\theta^2, \quad \text{d'où} \quad v^2 = (a^2 + h^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

donc, si la vitesse est constante, $\frac{d\theta}{dt}$ est constant. Posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{constante};$$

on a

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

où θ_0 est la valeur de θ pour $t = 0$.

Il vient

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \theta_0), \\ y = a \sin(\omega t + \theta_0), \\ z = h(\omega t + \theta_0), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \theta_0),$$

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \theta_0),$$

$$\frac{dz}{dt} = h\omega.$$

On voit d'abord que la projection du mobile sur l'axe est animée d'un mouvement uniforme. Pareillement sa projection sur le cercle de base a pour coordonnées x, y, 0, et la vitesse de cette projection est égale à

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a^2\omega^2;$$

elle est constante.

L'accélération se calcule sans peine; on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

elle est dirigée suivant la perpendiculaire à OZ issue du point P; on sait, en effet, que cette perpendiculaire est la normale principale de l'hélice; de plus elle a pour valeur $a\omega^2$; elle est égale aussi à

$$\frac{v^2}{R} = \frac{(a^2 + h^2)\,\omega^2}{R}.$$

En égalant ces deux expressions on trouve

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{a^2 + h^2}, \quad R = a + \frac{h^2}{a},$$

ce qui est l'expression connue du rayon de courbure de l'hélice circulaire.

Mouvement rectiligne uniformément varié.

Parmi les mouvements non uniformes, les plus simples sont les *mouvements rectilignes uniformément variés.* Pour ces mouvements, l'accélération, qui se réduit à la composante tangentielle, est constante en grandeur et direction.

Si le mobile se meut dans le sens de l'accélération le mouvement est uniformément accéléré; il est uniformément retardé dans le cas contraire.

Rappelons que l'espace x est lié au temps par la formule

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0,$$

où γ est la valeur constante de l'accélération, v_0, x_0 les valeurs de la vitesse et de x pour $t = 0$.

En effet, on a par hypothèse, γ désignant l'accélération constante,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma,$$

d'où par intégrations successives

$$\frac{dx}{dt} = \gamma t + v_0, \quad x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0.$$

On voit que dans ce mouvement la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux quelconques.

Ce mouvement joue un rôle important dans la théorie de la pesanteur.

CHAPITRE III

Du changement de système de comparaison. Mouvement relatif.

---

25. Si au lieu de comparer un point mobile M à un système invariable Σ on le compare à un autre, Σ_1, on sera conduit à une nouvelle notion du mouvement de M; on aura à considérer d'autres éléments géométriques et mécaniques. Les éléments primitifs et les nouveaux ne sont pas indépendants; proposons-nous de passer des uns aux autres.

Mouvement d'un système invariable par rapport à un autre.

Soient T_1 un trièdre trirectangle lié invariablement à Σ_1, T un trièdre trirectangle lié invariablement à Σ. Soient, à l'époque t, a, b, c, les coordonnées de l'origine de T par rapport à T_1, et

	x_1	y_1	z_1
x	α	β	γ
y	α'	β'	γ'
z	α''	β''	γ''

le tableau des cosinus directeurs des axes du trièdre T par rapport à ceux du trièdre T_1; appelons P_1 le point lié à T_1 avec lequel le point mobile M coïncide à l'époque t; P le point lié à T avec lequel M coïncide au même instant; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de P_1 par rapport à T_1, x, y, z celles de P par rapport à T. Puisque P et P_1 coïncident à l'époque t, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y_1 = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z_1 = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Si le point mobile M est fixe par rapport au trièdre T, les coordonnées x, y, z sont invariables; a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont fonctions du temps, et les formules précédentes fournissent à chaque instant t la position de n'importe quel point de l'espace E lié au système Σ dans l'espace E_1 lié au système Σ_1; elles définissent donc, quand on fait varier t, un mouvement de l'espace E dans l'espace E_1.

Nous arrivons ainsi à définir avec précision *le mouvement d'un système invariable Σ par rapport à un autre Σ_1*.

Notion de la composition des vitesses.

Proposons-nous maintenant de résoudre la question suivante : on connaît 1° le mouvement de Σ par rapport à Σ_1 (c'est-à-dire les quantités a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' en fonction du temps); 2° le mouvement d'un mobile M par rapport au système Σ; trouver la vitesse de M dans son mouvement relativement au système Σ_1.

Différentions les équations (1) par rapport au temps, nous avons

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \left[\frac{da}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}x + \frac{d\alpha'}{dt}y + \frac{d\alpha''}{dt}z\right] \\
&\quad + \left[\alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt}\right], \\
\frac{dy_1}{dt} &= \left[\frac{db}{dt} + \frac{d\beta}{dt}x + \frac{d\beta'}{dt}y + \frac{d\beta''}{dt}z\right] \\
&\quad + \left[\beta\frac{dx}{dt} + \beta'\frac{dy}{dt} + \beta''\frac{dz}{dt}\right], \\
\frac{dz_1}{dt} &= \left[\frac{dc}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}x + \frac{d\gamma'}{dt}y + \frac{d\gamma''}{dt}z\right] \\
&\quad + \left[\gamma\frac{dx}{dt} + \gamma'\frac{dy}{dt} + \gamma''\frac{dz}{dt}\right].
\end{aligned}\right.$$

Vitesse d'entraînement. Rappelons que nous avons désigné par M le mobile et par P le point du système Σ avec lequel M coïncide à l'époque T. Dans le mouvement d'ensemble de Σ par rapport à Σ_1, le point P a une certaine vitesse $\overline{V_e}$ que l'on appelle la *vitesse d'entraînement*; désignons par

$\overline{V}$ la vitesse de M dans son mouvement relativement au système Σ; enfin, soit $\overline{V_1}$ sa vitesse par rapport au système Σ_1.

Les coordonnées de P par rapport à T sont invariables et égales aux *valeurs actuelles* x, y, z des coordonnées du point M. Les projections de $\overline{V_e}$ sur les axes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 du trièdre T_1 sont donc

$$(3) \quad \begin{cases} V_{e,x_1} = \dfrac{da}{dt} + \dfrac{d\alpha}{dt}x + \dfrac{d\alpha'}{dt}y + \dfrac{d\alpha''}{dt}z, \\ V_{e,y_1} = \dfrac{db}{dt} + \dfrac{d\beta}{dt}x + \dfrac{d\beta'}{dt}y + \dfrac{d\beta''}{dt}z, \\ V_{e,z_1} = \dfrac{dc}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}x + \dfrac{d\gamma'}{dt}y + \dfrac{d\gamma''}{dt}z. \end{cases}$$

Les projections de $\overline{V}$ sur les axes de T sont

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

les projections de $\overline{V}$ sur les axes du trièdre T_1 sont donc

$$(4) \quad \begin{cases} V_{x_1} = \alpha\dfrac{dx}{dt} + \alpha'\dfrac{dy}{dt} + \alpha''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_{y_1} = \beta\dfrac{dx}{dt} + \beta'\dfrac{dy}{dt} + \beta''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_{z_1} = \gamma\dfrac{dx}{dt} + \gamma'\dfrac{dy}{dt} + \gamma''\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Enfin les projections de $\overline{V_1}$ sur les axes de T_1 sont

$$V_{1,x_1} = \frac{dx_1}{dt}, \quad V_{1,y_1} = \frac{dy_1}{dt}, \quad V_{1,z_1} = \frac{dz_1}{dt}.$$

Il vient donc, en comparant les formules (2), (3) et (4),

$$(5) \quad V_{1,x_1} = V_{e,x_1} + V_{x_1}, \quad V_{1,y_1} = V_{e,y_1} + V_{y_1}, \quad V_{1,z_1} = V_{e,z_1} + V_{z_1}.$$

Ces équations sont équivalentes à l'équation géométrique unique.

$$\overline{V_1} = \overline{V} + \overline{V_e}.$$

Relation entre la vitesse absolue, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.

De là ce théorème :

Quand on passe du mouvement d'un point M *par rapport à un système* Σ *au mouvement par rapport à un autre système* Σ_1, *la vitesse de* M *par rapport à* Σ_1 *est la somme géométrique de sa vitesse par rapport à* Σ *et de la vitesse d'entraînement*, *c'est-à-dire*

de la vitesse par rapport à Σ_1 du point P *de* Σ *avec lequel coïncide le mobile à l'époque considérée.*

Appelons *absolus* les mouvements rapportés à un trièdre déterminé T_1, arbitrairement choisi, du reste; appelons vitesse, accélération, trajectoires *absolues* les éléments relatifs à de tels mouvements. Alors $\overline{V_1}$ est la vitesse absolue, $\overline{V}$ qui est la vitesse par rapport au trièdre T s'appellera si l'on veut la vitesse *relative*, et à l'aide de ces définitions on peut énoncer le théorème précédent en disant que *la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.* Mais il ne faut attribuer à ces termes *absolu, relatif* qu'un sens purement conventionnel, car le mouvement par rapport à T_1 n'est ni plus absolu, ni moins relatif que le mouvement par rapport au trièdre T.

On donne quelquefois au trièdre T le nom de *trièdre mobile;* bien que T et T_1 soient également mobiles l'un et l'autre, leur mouvement ayant été défini comme un changement de leurs positions relatives.

Il n'est pas mauvais cependant de rompre la symétrie de langage en vue des applications ultérieures.

Projections de la vitesse sur les axes mobiles.

26. C'est encore en vue de ces applications que nous mettrons les formules précédentes sous une autre forme, en projetant la vitesse absolue $\overline{V_a}$, la vitesse d'entraînement $\overline{V_e}$ et la vitesse relative $\overline{V_r}$ sur les axes mobiles. On a trouvé

$$\overline{V_a} = \overline{V_e} + \overline{V_r};$$

donc, en projetant sur les axes du trièdre T,

$$\begin{aligned} V_{a,x} &= V_{e,x} + V_{r,x}, \\ V_{a,y} &= V_{e,y} + V_{r,y}, \\ V_{a,z} &= V_{e,z} + V_{r,z}. \end{aligned}$$

On a vu que les projections sur les axes de T_1 du segment $\overline{V_e}$ sont :

$$\left\{ \begin{aligned} V_{e,x_1} &= \frac{da}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}x + \frac{d\alpha'}{dt}y + \frac{d\alpha''}{dt}z, \\ V_{e,y_1} &= \frac{db}{dt} + \frac{d\beta}{dt}x + \frac{d\beta'}{dt}y + \frac{d\beta''}{dt}z, \\ V_{e,z_1} &= \frac{dc}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}x + \frac{d\gamma'}{dt}y + \frac{d\gamma''}{dt}z; \end{aligned} \right.$$

la projection de $\overline{V_e}$ sur Ox est, par suite,

$$\begin{aligned}\overline{V_{e,x}} = &\left(\alpha \frac{da}{dt} + \beta \frac{db}{dt} + \gamma \frac{dc}{dt}\right)\\ &+ \left(\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt}\right) x\\ &+ \left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right) y\\ &+ \left(\alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt}\right) z.\end{aligned}$$

Nous poserons :

$$\begin{aligned}\alpha \frac{da}{dt} + \beta \frac{db}{dt} + \gamma \frac{dc}{dt} &= \xi,\\ \alpha' \frac{da}{dt} + \beta' \frac{db}{dt} + \gamma' \frac{dc}{dt} &= \eta,\\ \alpha'' \frac{da}{dt} + \beta'' \frac{db}{dt} + \gamma'' \frac{dc}{dt} &= \zeta,\end{aligned}$$

et observant que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0,\\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0,\\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\end{aligned}$$

on aura

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} = 0,$$

$$\alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} = 0,$$

$$\begin{aligned}\left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right) + \left(\alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt}\right) &= 0,\\ \left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt}\right) + \left(\alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt}\right) &= 0,\\ \left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt}\right) + \left(\alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Ces équations nous permettent de poser :

$$\left(\alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt}\right) = -\left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt}\right) = p,$$

$$\left(\alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt}\right) = -\left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt}\right) = q,$$

$$\left(\alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt}\right) = -\left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right) = r,$$

et nous aurons ainsi :

$$V_{e,x} = \xi + qz - ry;$$

un calcul tout pareil donnera

$$V_{e,y} = \eta + rx - pz,$$
$$V_{e,z} = \zeta + py - qx;$$

on a, du reste

$$V_{r,x} = \frac{dx}{dt}, \quad V_{r,y} = \frac{dy}{dt}, \quad V_{r,z} = \frac{dz}{dt},$$

Formules fondamentales. il vient donc en définitive :

$$V_{a,x} = \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt},$$
$$V_{a,y} = \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt},$$
$$V_{a,z} = \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt},$$

formules fondamentales d'où se déduit très aisément toute la cinématique géométrique.

Interprétation des projections de la vitesse d'entraînement. On peut faire dès à présent une remarque importante concernant le mouvement d'un système invariable. La vitesse d'entraînement d'un point P (x, y, z) est donnée par les formules

$$(F) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_{e,x} &= \xi + qz - ry, \\ V_{e,y} &= \eta + rx - pz, \\ V_{e,z} &= \zeta + py - qx; \end{aligned} \right.$$

considérons le système de segment S, ayant pour coordonnées

$$p, q, r, \xi, \eta, \zeta.$$

On voit que $V_{e,x}$, $V_{e,y}$, $V_{e,z}$ sont les projections du moment résultant de S au point P.

On peut donc énoncer ce théorème :

Dans tout système invariable en mouvement il y a à chaque instant un système de segments S *dont le moment résultant en un point quelconque représente la vitesse d'entraînement.*

Le théorème est un résultat de calcul; aussi restera-t-il purement formel tant que nous n'aurons pas découvert la *nature des segments qui peuvent constituer ce système* S.

Nous ne le pourrons qu'après avoir exposé la théorie des rotations.

Composition des vitesses.

Faisons auparavant quelques remarques sur le théorème de la *composition des vitesses* que nous venons de démontrer.

Supposons que l'on ait plusieurs systèmes invariables Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_n en mouvement, les uns par rapport aux autres, et soit M un point mobile par rapport à Σ_1. A l'époque t considérée, le mobile M coïncide avec un point P_1 de Σ_1, avec un point P_2 de Σ_2, ... avec un point P_{n-1} de Σ_{n-1}.

Désignons par $\overline{v_1}$ la vitesse du mobile par rapport au système Σ_1, par $\overline{v_2}$ la vitesse du point P_1 de Σ_1 dans le mouvement relatif de Σ_1 par rapport à Σ_2, par $\overline{v_3}$ la vitesse du point P_2 de Σ_2 dans le mouvement relatif de Σ_2 par rapport à Σ_3, ..., par $\overline{v_i}$ la vitesse du point P_{i-1} de Σ_{i-1} dans le mouvement de Σ_{i-1} par rapport à Σ_i ... et finalement par $\overline{v_n}$ la vitesse du point P_{n-1} de Σ_{n-1} dans le mouvement de Σ_{n-1} par rapport à Σ_n.

Nous avons appelé $\overline{v_1}$ la vitesse de M par rapport au système Σ_1; appelons $\overline{v_i'}$ la vitesse du mobile M par rapport au système Σ_i. On a, par application du premier théorème

$$\overline{v_n'} = \overline{v_{n-1}'} + \overline{v_n}$$

qui exprime que la vitesse de M par rapport à Σ_n est la somme géométrique de sa vitesse v_{n-1}' par rapport à Σ_{n-1} et de la vitesse d'entraînement $\overline{v_n}$.

On aura de même, en appliquant ce théorème au mouvement de M par rapport à Σ_{n-2} et Σ_{n-1},

$$\overline{v_{n-1}'} = \overline{v_{n-2}'} + \overline{v_{n-1}}$$

et ainsi de suite

$$\overline{v_i'} = \overline{v_{i-1}'} + \overline{v_i}$$

et finalement

$$\overline{v'_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2},$$

d'où, par addition,

$$\overline{v'_n} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \dots + \overline{v_n}.$$

Ainsi la vitesse de M par rapport au système Σ_n est la somme géométrique de la vitesse du point M par rapport à Σ_1 et des vitesses d'entraînement consécutives de Σ_1 par rapport à Σ_2, de Σ_2 par rapport à Σ_3, ..., de Σ_{n-1} par rapport à Σ_n.

Nous sommes actuellement en mesure de parler de la composition des vitesses et d'expliquer ce que l'on entend quand on parle d'*un mobile animé à la fois de plusieurs vitesses*. Cette locution signifie toujours que le point matériel se trouve d'abord rapporté à un système Σ_1 mobile par rapport à un autre Σ_2, ... jusqu'à un système Σ_n auquel on veut rapporter finalement le mouvement du point M.

Exemples. I. Soit un point mobile M dans un plan, soit Δ la parallèle à Ox menée par le point M. On peut regarder le mouvement du point M dans le plan xOy comme résultant du mouvement de M sur Δ, tandis que Δ se déplace en restant parallèle à Ox, pendant que son point O' glisse sur Oy.

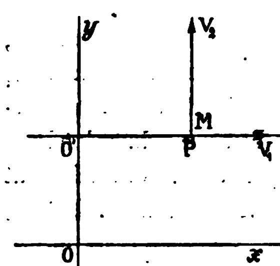


Fig. 35.

La vitesse de M par rapport au système d'axes xOy sera la somme géométrique de sa vitesse $\overline{v_1}$ sur Δ et de la vitesse d'entraînement $\overline{v_2}$ de M, c'est-à-dire de la vitesse du point P de Δ, avec lequel M coïncide à l'instant considéré.

La vitesse $\overline{v_1}$ est le segment $\overline{MV_1}$ mesuré par $\frac{dx}{dt}$ où x est le nombre qui mesure $\overline{O'P}$. De même, il est clair que dans le temps dt tous les points de Δ décrivent des segments égaux infiniment petits parallèles à Oy, la vitesse d'entraînement est donc la vitesse du point O' sur Oy, c'est-à-dire $\frac{dy}{dt}$.

La vitesse de M dans le plan est la somme géométrique de deux segments $\overline{MV_1}$, $\overline{MV_2}$ parallèles à Ox, Oy et mesurés par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; nous interprétons ainsi d'une nouvelle manière les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées.

II. Appliquons le même raisonnement au cas du mouvement d'un point dans l'espace.

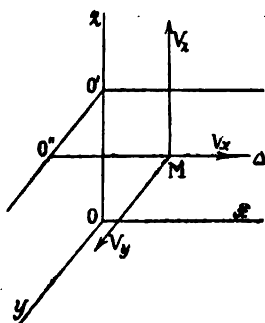


Fig. 80.

Soit $x'O'y'$ le plan parallèle à xOy mené par le mobile M ; soit Δ la parallèle à Ox menée par M dans ce plan. On peut regarder le mouvement de M par rapport au trièdre $Oxyz$ comme résultant du mouvement de M sur Δ, tandis que Δ se déplace en restant parallèle à $O'x'$ dans le plan $x'O'y'$ et que le plan lui-même se déplace en restant parallèle au plan xOy.

Nous aurons ici à considérer trois vitesses :

1° La vitesse de M sur Δ dirigé suivant Δ, c'est-à-dire parallèlement à Ox et égale à $\frac{dx}{dt}$;

2° La vitesse d'entraînement de M dans le mouvement de Δ dans le plan $x'O'y'$, vitesse que nous savons déjà être égale à $\frac{dy}{dt}$ et parallèle à $O'y'$ (ou à Oy) ;

3° La vitesse d'entraînement de M dans le mouvement du plan $x'Oy'$; cette vitesse est évidemment égale à $\frac{dz}{dt}$ et dirigée parallèlement à Oz.

Les projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse sur les axes peuvent donc être considérées comme les vitesses dans trois mouvements particuliers dont la composition donne le mouvement du point M par rapport au trièdre $Oxyz$.

III. Prenons encore les coordonnées polaires dans le plan. On peut regarder le mobile M comme se mouvant sur le rayon vecteur, tandis que celui-ci tourne autour de l'origine.

La vitesse du mobile sur le rayon vecteur est d'abord $\frac{dr}{dt}$ et est dirigée suivant ce rayon. La vitesse d'entraînement est celle d'un point sur un cercle; elle est égale évidemment à $r\frac{d\theta}{dt}$ et portée par la tangente au cercle des coordonnées. On retrouve ainsi la vitesse d'élongation et la vitesse de circulation.

IV. L'application aux coordonnées polaires dans l'espace se fait de

même sans difficulté; on retrouve encore une vitesse $\frac{dr}{dt}$ portée par le rayon vecteur, une vitesse $r\frac{d\theta}{dt}$ suivant la tangente au méridien, $r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}$ suivant la tangente au parallèle.

Applications géométriques. — Théorèmes de Poinsot et de Roberval.

Théorème de Poinsot.

27. On doit à Poinsot un théorème intéressant qui se rattache d'une manière simple aux considérations précédentes.

Soit une surface S et une normale NN′ en un point N de cette surface; prenons la longueur NN′ constante, on sait que le point N′ décrit une seconde surface S′ admettant également NN′ comme normale. Cette seconde surface est dite *parallèle* à la surface S.

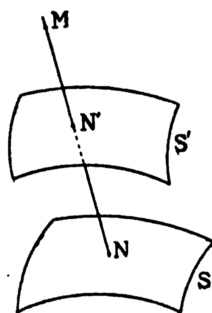


Fig. 37.

Cela posé, soit M un point mobile dans l'espace et MN une normale issue de M à la surface S, soit N le pied de cette normale; on peut regarder tout mouvement de M comme résultant d'un glissement de M sur la normale dont le pied N se déplace en même temps sur la surface S; la vitesse relative est dirigée suivant la normale MN et égale à $\frac{dr}{dt}$, r désignant la distance MN; la vitesse d'entraînement est, d'après la remarque qui précède, tangente à la surface parallèle à la surface S qui passe au point M; elle est donc rectangulaire avec MN. On peut conclure de là que la projection de la vitesse du point M sur la normale est égale à $\frac{dr}{dt}$. Ce résultat généralise tout d'abord la notion de la vitesse d'élongation.

Montrons maintenant comment il donne le théorème de Poinsot ([1]).

Soient plusieurs surfaces S, S′, S″, ..., et un point M; soient r, r', r'', ..., les longueurs des normales menées de M à S, S′, S″ ..., et supposons qu'on assujettisse ces longueurs à vérifier une équation

$$f(r, r', r'', \ldots) = 0;$$

([1]) *Journal de l'École polytechnique*, t. VI.

le point M décrit alors une surface Σ; la normale à cette surface s'obtient d'après la règle suivante :

On porte sur les normales aux surfaces S, S', S'', ..., *à partir de* M *des segments mesurés respectivement par les nombres* $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$, $\frac{\partial f}{\partial r''}$, ...; *la somme géométrique de ces segments sera dirigée suivant la normale à la surface* Σ.

Supposons le point M mobile sur la surface Σ et désignons par v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées; soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à la surface S, λ', μ', ν' ceux de la normale à la surface S', ..., la projection de la vitesse sur la normale à la surface S sera

$$\lambda v_x + \mu v_y + \nu v_z = \frac{dr}{dt}$$

et de même, en projetant sur les normales aux autres surfaces,

$$\lambda' v_x + \mu' v_y + \nu' v_z = \frac{dr'}{dt},$$
$$\lambda'' v_x + \mu'' v_y + \nu'' v_z = \frac{dr''}{dt},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Multiplions par $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$, $\frac{\partial f}{\partial r''}$, ... et ajoutons, il vient

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda \frac{\partial f}{dr} + \lambda' \frac{\partial f}{\partial r'} + \lambda'' \frac{\partial f}{\partial r''} + \dots\right) v_x \\
&+ \left(\mu \frac{\partial f}{\partial r} + \mu' \frac{\partial f}{\partial r'} + \dots\dots\dots\dots\right) v_y \\
&+ \left(\nu \frac{\partial f}{\partial r} + \nu' \frac{\partial f}{\partial r'} + \dots\dots\dots\dots\right) v_z = \frac{df}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

On voit que les coefficients de v_x, v_y, v_z sont les projections de la résultante des segments $\frac{\partial f}{dr}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$, ... portés par les normales; l'équation précédente exprime donc que cette résultante est perpendiculaire à la vitesse du point M; ce résultat étant indépendant de la courbe

que le point M décrit sur la surface Σ, on en conclut que la résultante est normale à cette surface.

Le théorème a lieu aussi dans le plan si aux surfaces S, S′, ... on substitue des courbes.

Applications. — Prenons, par exemple, pour S, S′ deux cercles infiniment petits de centre F, F′, alors r, r' sont les distances de M à F, F′, et la méthode de Poinsot nous donne la construction de la normale en coordonnées bi-polaires.

On appliquera sans difficulté cette méthode au cas de l'ellipse et de l'hyperbole par lesquelles on a

$$r \pm r' = \text{const.};$$

on reconnait ainsi que pour l'ellipse la normale est bissectrice de l'angle F′MF, et pour l'hyperbole, bissectrice de l'angle supplémentaire.

Pour la parabole, il faudrait prendre pour S un cercle infiniment petit décrit autour du foyer et pour S′ la directrice ; la propriété angulaire de la tangente se déduit encore de la règle générale de Poinsot.

Prenons encore la surface définie par l'équation

$$r + r' = r'',$$

où r, r', r'' sont les distances du point M à trois points fixes F, F′, F″; on portera une même longueur sur MF, MF′, MF″ (cette dernière en sens inverse de MF″), la normale est la résultante des trois segments ainsi construits; elle est donc la bissectrice intérieure du trièdre formé par MF, MF′ et la direction opposée à MF″.

Méthode de Roberval.

28. Au même ordre d'idées se rattache encore la méthode de construction des tangentes trouvée en 1636 par Roberval et communiquée par lui en 1640 à Fermat. L'exposition de cette méthode se trouve dans le tome VI des anciens mémoires de l'Académie des Sciences. Elle a donné lieu à plusieurs erreurs. L'énoncé donné par Roberval lui-même est inexact; en second lieu, Montucla, dans son *Histoire des mathématiques*, et Monge, dans sa *Géométrie descriptive* (1), ont reproduit la même erreur et ont donné des applications

(1) Page 91 de la 5e édition.

fautives que M. Duhamel a rectifiées dans un court et intéressant travail inséré au tome V des *Savants étrangers*.

Soient F, F', F" ... des points fixes, r, r', r'', ... les distances d'un point M à ces points; le point M décrivant une courbe, les projections de la vitesse sur les rayons FM, F'M', F"M", ... sont $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt}$, ... Si donc on construit sur les rayons des segments $\overline{MP}$, $\overline{MP'}$, $\overline{MP''}$, ... proportionnels à $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt}$, et si l'on mène en P, P', P", les plans normaux à ces segments, ces plans se couperont en un point Q de la direction de la vitesse; MQ sera la tangente (¹).

On peut évidemment généraliser la construction de Roberval. Supposons que S, S', S" ... soient des surfaces et r, r', r'', ... les longueurs des normales issues de M à ces surfaces. On a vu que $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt}$, ... sont les projections de la vitesse sur les normales; la construction précédente peut encore s'appliquer à ce cas. Traitons quelques exemples simples.

Les cas de l'ellipse et de l'hyperbole nous conduisent à deux segments égaux portés suivant MF, MF' pour l'hyperbole et suivant MF et F'M (opposé à MF') pour l'ellipse; on a, en effet, dans le premier cas

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt},$$

et dans le second $\frac{dr}{dt} = -\frac{dr'}{dt}$.

On retrouve donc les propriétés angulaires bien connues des tangentes à ces courbes.

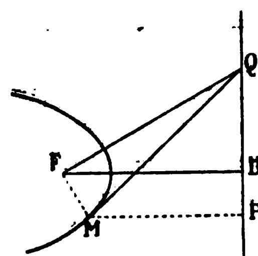


Fig. 38.

Mais au lieu de prendre deux foyers, on peut prendre un foyer et la directrice correspondante. Soient F et PD un foyer, et la directrice correspondante.

On a, en posant $\overline{MF} = r$, $\overline{MP} = r'$,

$$r = er',$$

d'où $\frac{dr}{dt} = e\frac{dr'}{dt}$, et par suite r, r' sont

(¹) Roberval proposait au contraire de faire la somme géométrique des segments $\overline{MP}$, $\overline{MP'}$, $\overline{MP''}$, ...

proportionnels à $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$; on peut donc prendre pour segments à porter sur les normales $MF = r$, $MP = r'$; la normale en P à MP est la directrice; elle est coupée en Q par la normale au rayon FM; ce point Q appartient à la tangente qui est donc MQ. On retrouve une propriété de la tangente qui est commune aux trois genres de coniques.

Autre exemple de l'application de la composition des vitesses à la construction des tangentes.

Les règles de Roberval et de Poinsot ne sont pas les seules façons d'utiliser la composition des vitesses dans la construction des tangentes et des normales. Je vais en donner un exemple.

Tangentes aux conchoïdes. — Soient un point O et une courbe (A) que décrit un point M, menons OM et prenons MM′ constant; le lieu de M′ est une courbe (C) appelée la *conchoïde* de (A). Connaissant la tangente à (A), on peut construire la tangente à (C).

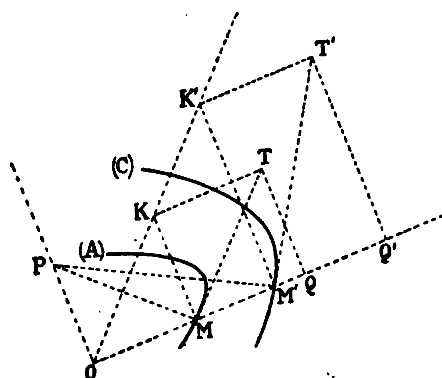


Fig. 39.

Soient OP perpendiculaire au rayon vecteur, P le point où la normale MP à (A) coupe OP, menons OKK′ faisant un angle de 45° avec le rayon vecteur; élevons MK perpendiculaire au rayon vecteur, soit K le point de rencontre de cette droite avec OK, menons MT tangente à la courbe (A) et soit T le point où la parallèle KT au rayon vecteur coupe cette tangente.

On peut supposer la courbe (A) parcourue avec la vitesse MT, alors MK sera la vitesse de circulation et $MQ = KT$ sera la vitesse d'élongation.

Mais les triangles OPM et MTQ, qui sont rectangles, sont égaux, car $OM = MK = QT$; donc $OP = MQ$. La vitesse de circulation étant $MK = OM = r$, on voit que notre hypothèse revient à supposer que l'angle polaire θ a une vitesse constante égale à l'unité.

Considérons de même la conchoïde et faisons une construction semblable; puisque $\frac{d\theta}{dt}$ est égal à 1, la vitesse de circulation de M′ sera égale à $OM' = M'K'$, et sa vitesse d'élongation M′Q′ sera égale au segment que détermine sur OP la normale à la conchoïde. Or,

puisque MM′ est constant, M et M′ ont même vitesse d'élongation; donc $M'Q' = MQ$ et, par conséquent, la normale en M′ détermine sur OP le même segment OP que la normale à la courbe (A). Donc la normale en M′ à la conchoïde passe au point P, ce qui donne la construction classique de la normale aux conchoïdes.

On démontre aisément de même les propositions suivantes :

Les plans normaux à une courbe gauche (A) *et à sa conchoïde* (C) *relative à un point* O *de l'espace se coupent suivant une droite contenue dans le plan normal en* O *au rayon vecteur.*

Les normales à une surface et à sa conchoïde relative à un point O *de l'espace se coupent dans le plan élevé en* O *perpendiculairement au rayon vecteur.*

CHAPITRE IV

Mouvement d'un corps solide.

---

29. Nous avons parlé dans les paragraphes précédents du mouvement d'un système invariable par rapport à un autre; nous allons analyser en détail la nature de ce mouvement.

Commençons par le cas simple des rotations.

Soit un axe Δ; concevons un observateur traversé des pieds à la tête par cet axe; il y a deux sens possibles de rotations autour de cet axe, on appelle *direct* celui qui s'effectue de gauche à droite pour cet observateur.

On fait quelquefois la convention opposée.

Mouvement de rotation continu.

Soit un trièdre T_1 (Ox_1y_1z) et un second trièdre T $(Oxyz)$ ayant avec le premier l'axe Oz commun.

Nous supposons qu'une rotation directe autour de Oz d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ amène Ox sur Oy et Ox_1 sur Oy_1. Soit θ l'angle dont il faudrait faire tourner dans le sens direct Ox_1 autour de Oz pour l'appliquer sur Ox. Après cette rotation, il est clair que le trièdre T_1 coïncide avec le trièdre T. Cela posé, imaginons un corps lié invariablement au trièdre T, et faisons varier d'une façon continue l'angle θ, le trièdre T et le corps seront, par rapport au trièdre T_1, animés d'un *mouvement de rotation continu* autour de l'axe Oz. La dérivée $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ de θ par rapport au temps s'appelle la *vitesse angulaire*. Si cette vitesse est positive, θ croît avec le temps, le mouvement s'effectue à l'instant t dans le sens direct autour de Oz; il a lieu dans le sens inverse si ω est négatif.

Soit un point M dont les coordonnées cylindro-polaires par rapport au trièdre mobile T seront r, φ, z; ses coordonnées cylindro-polaires par rapport au trièdre fixe T_1 seront r, $\varphi + \theta$, z.

Soit N le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe Oz, MM′ la perpendiculaire au plan mené par Oz et le point M prise dans un sens *dextrorsum* par rapport à Oz, et enfin MM″ la parallèle à Oz issue de M.

La vitesse du point M se projette sur NM, MM′, MM″ suivant des segments qui ont les expressions (nº 20) :

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d(\varphi + \theta)}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

lesquelles dans le cas où M est lié invariablement au trièdre T se réduisent aux valeurs

$$0, \quad \omega r, \quad 0.$$

Ainsi *la vitesse de tout point* M *du corps dans le mouvement de rotation autour de* Oz *est un segment issu de* M, *normal au plan mené par* Oz *et* M, dextrorsum *avec* Oz *si* ω *est positif et* sinistrorsum *avec* Oz *si* ω *est négatif, et dont la longueur est égale à la valeur absolue de* ωr.

Emploi des moments dans la théorie des rotations. On peut donner à ce théorème un énoncé plus simple en faisant usage des moments. Portons sur l'axe Oz un segment $\overline{\Omega}$ mesuré sur cet axe par le nombre ω; pour construire le moment de ce segment $\overline{\Omega}$ par rapport à M il faudra élever en M une perpendiculaire au plan mené par M et Oz et construire un segment $\overline{MV}$ *dextrorsum* avec $\overline{\Omega}$ et de longueur égale au produit de la distance r par la longueur de $\overline{\Omega}$. Ce segment $\overline{MV}$ sera donc mesuré par ωr sur l'axe issu de M normal au plan MOZ et *dextrorsum* avec OZ; on voit qu'il n'est autre que le segment qui représente la vitesse du point M dans le mouvement de rotation.

On a donc ce théorème :

Si un corps est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ, *et si à l'instant* t ω *est la vitesse angulaire de rotation, la vitesse de tout point* M *du corps se représente par le moment, pris par rapport au point* M, *du segment* $\overline{\Omega}$ *mesuré par le nombre* ω *sur l'axe* Δ.

Mouvements tangents. La notion suivante nous permettra d'énoncer avec plus de précision les propriétés du mouvement d'un corps solide.

Nous dirons de deux mouvements différents imprimés à un corps solide qu'ils sont *tangents* à une époque donnée t, si, à cet instant, ils produisent dans le corps la même distribution des vitesses d'entraînement; si, en un mot, tout point du corps a, à l'instant considéré, la même vitesse dans les deux mouvements.

Rotation instantanée. Supposons, par exemple, qu'à un moment donné la distribution des vitesses s'obtienne en prenant les moments d'un segment $\overline{\Omega}$ par rapport aux divers points du corps. A ce moment tout se passe, *en ce qui concerne les vitesses,* comme si le corps était animé d'une rotation continue autour d'un axe Δ portant le segment $\overline{\Omega}$. Le mouvement du corps possède à cet instant une rotation continue *tangente.*

C'est là ce que nous entendrons encore en disant qu'à l'époque *t le corps est animé d'une vitesse de rotation* ou, pour abréger, d'une rotation ω, bien qu'il puisse ne pas posséder en réalité *un mouvement de rotation continu.* Pour distinguer les simples rotations qui n'interviennent pour ainsi dire qu'à un instant du mouvement pour donner à cet instant la distribution des vitesses, on les appelle quelquefois *rotations instantanées.*

Composition des rotations. **30.** L'introduction des moments dans la représentation des vitesses d'un mouvement de rotation est de la plus haute importance; elle établit un lien étroit entre la théorie des segments et des moments et celle du déplacement d'un corps solide.

Concevons qu'un système invariable soit animé à la fois de plusieurs rotations; cela signifie que par rapport à un système Σ_1 le système Σ est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ_1 avec la vitesse ω_1, tandis que Σ_1 est animé d'une rotation de vitesse ω_2 autour d'un axe Δ_2 par rapport à un autre système Σ_2 et ainsi de suite. Considérons les segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... qui représentent ces rotations; la vitesse d'un point quelconque M du système Σ par rapport au dernier système de comparaison est la somme géométrique des moments des segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... par rapport au point M.

Si donc on considère le système de ces segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ..., le moment résultant de ce système par rapport au point M représente la vitesse qui résulte pour M de toutes ces rotations.

Les systèmes de segments trouvent ainsi une application directe dans la composition des rotations.

Supposons qu'il s'agisse de deux rotations ω_1, ω_2, dont les axes sont concourants; tout se passera au point de vue des vitesses comme si on avait une rotation unique dont la vitesse serait la somme géométrique des segments ω_1, ω_2. Cela tient à ce que le moment de cette somme géométrique en un point est la somme géométrique des moments des segments ω_1 et ω_2.

La même proposition s'applique au cas de plusieurs rotations concourantes. Nous parvenons ainsi à la composition des rotations autour d'axes concourants. Généralement, supposons un même corps soumis à deux systèmes de rotations dont les vitesses angulaires sont représentées par les segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... d'une part, et $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$, ... d'autre part. Si les deux systèmes de segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... et $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$, ... sont équivalents, la distribution des vitesses dans le corps est la même pour les deux systèmes de rotations. En effet, les deux systèmes de segments ont le même moment résultant en tous les points du corps.

Pour que le parallélisme entre la théorie des rotations et celle des segments soit parfait, il suffit d'interpréter le couple au point de vue des rotations.

Mouvement de translation continu.

31. Pour y parvenir, je vais d'abord définir une autre espèce de mouvement d'un corps solide, le *mouvement de translation continu.*

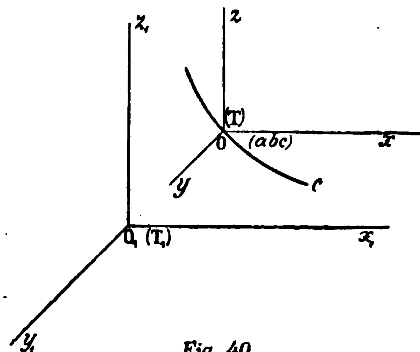


Fig. 40.

Soit un trièdre T_1 ($Ox_1y_1z_1$) que nous regarderons comme immobile, et un autre trièdre T ($Oxyz$) dont les axes restent parallèles à ceux du premier, mais dont l'origine O décrit une courbe C. Ce second trièdre T est dit animé par rapport au premier d'un mouvement de translation continu. La translation est *rectiligne* si la ligne C est une droite; elle est curviligne dans les autres cas.

Appelons a, b, c les coordonnées du point O par rapport au

trièdre T_1, et x, y, z les coordonnées d'un point M par rapport au trièdre mobile; les coordonnées de M par rapport au trièdre fixe seront

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c;$$

si donc le point M est lié invariablement au trièdre mobile, les projections de sa vitesse sur O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 seront

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}.$$

Ces expressions sont indépendantes du point M choisi; donc :

Dans un mouvement de translation continu, les points du corps ont à chaque instant tous la même vitesse en grandeur et direction.

Si le mouvement du point O est rectiligne et uniforme, sa vitesse est constante en grandeur, direction et sens, et il en est de même de tout point du corps mobile. Ainsi, dans le mouvement de translation continu rectiligne et uniforme, tous les points du corps ont la même vitesse constante en grandeur et direction; ils sont tous animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

On reconnaît aisément qu'à chaque instant il existe un mouvement continu de translation rectiligne et uniforme tangent à un mouvement continu de translation curviligne donné. Il suffit de considérer le mouvement de translation continu rectiligne et uniforme qui a pour vitesse en grandeur et direction la vitesse actuelle commune à tous les points du corps dans le mouvement de translation curviligne proposé.

Les formules déjà écrites

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c$$

prouvent que tous les points du corps décrivent des courbes égales à la courbe C.

Supposons que, réciproquement, un corps soit animé par rapport au trièdre T_1 d'un mouvement tel que *à tout instant* du mouvement la vitesse soit la même pour tous ses points; *le corps est animé d'un mouvement de translation continu.*

Soient, en effet, O un point du corps et a, b, c ses coordonnées par

rapport au trièdre T_1; regardons le point O comme l'origine d'un trièdre T dont les axes soient parallèles à ceux du trièdre T_1; appelons M un point du corps et x, y, z ses coordonnées par rapport au trièdre T, les coordonnées de M par rapport au trièdre T_1 seront

$$x_1 = a + x, \quad y_1 = b + y, \quad z_1 = c + z,$$

d'où résulte

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{db}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{dc}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Mais puisque le point M a, par hypothèse, même vitesse que le point O à tout instant du moment, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{db}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{dc}{dt},$$

d'où résulte

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0;$$

donc le point M est lié invariablement au trièdre T et le mouvement du corps est bien un mouvement de translation continu.

Translation instantanée.

Considérons un corps en mouvement et supposons qu'à une époque t déterminée les vitesses de tous ses points soient toutes égales, parallèles et de même sens. Il existe un mouvement de translation continu uniforme qui, à l'instant considéré, se trouve tangent au mouvement du corps. Nous pouvons dire, en conséquence, qu'à cet instant le corps est animé d'une vitesse de translation, ou plus simplement d'une translation. Mais cet état de distribution de vitesses peut varier avec le temps, et la translation considérée est appelée, pour cette raison, translation *instantanée*.

Une translation se représente par une famille de segments équipollents égaux et parallèles à la vitesse commune à tous les points du corps.

Couple de rotations.

Il est très aisé de concevoir maintenant ce qu'est un couple de rotations. Par définition même du couple, le moment d'un tel système est le même en tous les points de l'espace. Donc un couple de rotations a pour effet d'attribuer à tous les points d'un corps la même vitesse en grandeur et en direction.

Un couple de rotations est ainsi équivalent à une translation. La famille de segments équipollents qui représente cette translation est précisément celle qui est engendrée par le moment du couple relatif à tous les points de l'espace.

Composition des translations.

La composition des couples correspondra naturellement à la composition des translations; si un corps est animé à la fois de plusieurs translations instantanées, la distribution des vitesses sera la même que s'il était animé d'une translation unique représentée par un segment égal en grandeur et direction à la somme géométrique des segments qui représentent les translations proposées.

Distribution des vitesses dans un solide en mouvement.

Généralité des vitesses résultant de plusieurs rotations.

32. Maintenant que le parallélisme entre la composition des rotations et la théorie des segments est complètement établi, il reste à voir quel rôle les rotations, et par suite les segments, peuvent jouer dans le mouvement général d'un corps. Si tout mouvement d'un corps peut, au point de vue des vitesses, être regardé comme résultant de la composition de plusieurs rotations, la théorie des rotations comprend la théorie générale du déplacement d'un corps. Or, il est aisé de prouver qu'il en est effectivement ainsi.

Une première démonstration est immédiatement fournie par les formules (F) du n° 26, qui donnent la distribution des vitesses dans un corps en mouvement :

$$v_x = \xi + qz - ry,$$
$$v_y = \eta + rx - pz,$$
$$v_z = \zeta + py - qx.$$

Nous avons fait remarquer à cet endroit que la vitesse de chaque point M du corps est le moment résultant en ce point d'un système de segments ayant les coordonnées

$$p, q, r, \xi, \eta, \zeta;$$

mais nous n'avions alors aucun élément qui nous permît d'interpréter sous une forme concrète les segments dont ce système était

composé. Nous le pouvons maintenant. Concevons un ensemble de rotations représentées par des segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... dont le système ait pour coordonnées p, q, r, ξ, η, ζ. Il est clair que la distribution des vitesses est la même que si le corps était animé à la fois de toutes ces rotations. Ainsi :

En ce qui concerne les vitesses, tout mouvement d'un corps peut être à chaque instant regardé comme résultant de plusieurs rotations.

En appliquant ici les théorèmes de la théorie des segments, on voit que l'on pourra énoncer les propositions suivantes :

Réduction à deux rotations.

En ce qui concerne les vitesses, tout mouvement d'un corps peut être à chaque instant regardé comme résultant de DEUX *rotations dont l'une autour d'un axe arbitraire.* (Cet axe ne pouvant toutefois être choisi parmi les axes de moment nul.)

Ce théorème correspond à la réduction à deux d'un système de segments.

Nous avons vu encore que l'on peut réduire tout système de segments à un segment unique issu d'un point A arbitrairement choisi et à un couple; en appliquant ce théorème aux rotations, nous pourrons donc énoncer la proposition suivante :

Réduction à une rotation et une translation.

En ce qui concerne les vitesses, tout mouvement peut être regardé à chaque instant comme résultant d'une rotation ω autour d'un axe issu d'un point arbitraire A, *accompagnée d'une translation.*

Nous avons vu que le segment unique issu du point A a une grandeur et une direction invariables (celles de la résultante de translation). Donc la rotation ω aura une grandeur indépendante du point A choisi et aura lieu autour d'un axe dont la direction est aussi indépendante de A.

Réduction à une rotation et une translation suivant l'axe de rotation.

On peut choisir le point A, de sorte que le moment du couple et le segment unique soient portés par une même droite. Le point A est alors un point quelconque de l'axe central. Interprétons ceci au point de vue des rotations; nous voyons que, *en ce qui concerne les vitesses, tout mouvement d'un corps peut être à chaque instant considéré comme résultant d'une rotation autour d'un axe accompagné d'une translation suivant cet axe.*

Mouvement hélicoïdal.

Mouvement hélicoïdal continu.

33. Il y a un mouvement continu très simple qui réalise cette distribution des vitesses; c'est le mouvement hélicoïdal.

Voici en quoi il consiste :

Soit O_1, x_1, y_1, z un trièdre T_1, auquel on rapporte le mouvement. Un second trièdre T (O, x, y, z) a son axe Oz confondu avec l'axe O_1z du premier, et un point A de l'axe Ox décrit une hélice (H) ayant O_1z pour axe. Le trièdre T et un corps qui lui est invariablement lié sont dits, dans ces conditions, animés d'un mouvement hélicoïdal continu; il est, de plus, uniforme si le mouvement du point A est uniforme.

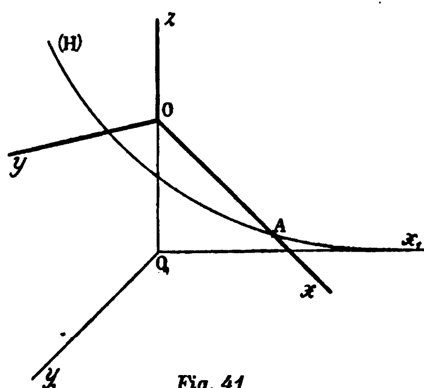


Fig. 41.

Soient u la distance O_1O affectée de son signe; θ l'angle dont le plan zO_1x_1 doit tourner autour de Oz dans le sens direct pour coïncider avec le plan zOx. Si h est le pas de l'hélice (H), on a, comme on sait,

$$u = h.\theta.$$

Soit maintenant un point M lié invariablement au trièdre T et appelons r, φ, z ses coordonnées cylindro-polaires par rapport au trièdre T; ces coordonnées sont constantes. Appelons r, φ_1, z_1 les coordonnées cylindro-polaires de M relatives au trièdre T_1, on a évidemment

$$\varphi_1 = \varphi + \theta,$$
$$z_1 = z + u,$$

d'où, puisque $u = h\theta$, l'équation

$$z_1 - z = h(\varphi_1 - \varphi).$$

Cette équation prouve que le point M décrit une hélice de même pas h que l'hélice (H).

Puisque le mouvement du point A est uniforme, la vitesse $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ de θ, qui est aussi celle de φ_1, est constante. La vitesse du point M apparaît comme la somme géométrique d'une vitesse $r\omega$ tangente au parallèle et d'une vitesse $\frac{dz_1}{dt}$ parallèle à Oz. Mais $\frac{dz_1}{dt}$ est égal à $h\omega$.

La vitesse de tout point du corps est donc la même que si le corps était animé à la fois d'une rotation ω autour de Oz, et d'une translation $h\omega$ suivant Oz.

Tout se passe donc à chaque instant comme si le corps était animé à la fois de la rotation ω autour de Oz et de la translation $h\omega$ suivant Oz.

On peut observer que si $h > 0$, le segment qui représente la translation a le sens du segment représentatif de la rotation. L'hélice décrite par chaque point du corps est *dextrorsum*.

Si h était négatif, l'inverse aurait lieu; les hélices seraient *sinistrorsum*.

Vis. Ce mouvement hélicoïdal est réalisé par l'écrou qui se meut sur sa vis. De là le nom de *vis* donné à l'ensemble de toutes les hélices que décrivent les points d'un corps animé d'un mouvement hélicoïdal continu. Pour définir une vis il faut connaître son axe et son pas h. La vis est *dextrorsum* ou *sinistrorsum* selon que h est positif ou négatif.

Dans la théorie des segments nous avons appelé vis un système de segments dont la résultante de translation est égale à l'unité. Un tel système de segments est défini si l'on se donne son axe central et son paramètre ou pas h. Cette notion coïncide entièrement avec celle de la vis telle qu'elle vient d'être définie. Supposons, en effet, que les segments du système considéré soient des rotations; ces rotations auront pour effet d'imprimer aux points du corps des vitesses que l'on pourra regarder comme résultant d'une rotation égale à l'unité autour de l'axe central et d'une translation h le long de cet axe. L'effet de ce système de rotations sera donc de faire décrire à tous points du corps des arcs d'hélices de la vis qui a même axe et même pas que le système de segments unitaire considéré.

Mouvement hélicoïdal instantané.

Nous avons vu que dans tout mouvement d'un corps la distribution des vitesses est la même que si le corps tournait avec une certaine vitesse autour d'un axe Δ_0, tout en glissant avec une certaine vitesse de translation le long de cet axe, et que tout se passe comme si le mouvement était un mouvement hélicoïdal autour de l'axe Δ_0; c'est ce qu'exprime le théorème suivant :

Il y a à chaque instant un mouvement hélicoïdal tangent au mouvement d'un corps.

De sorte que, pendant l'intervalle de temps dt, tous les points du corps décrivent de petits arcs d'hélice d'une certaine vis.

Les formules que nous avons données pour l'axe central permettent de trouver les éléments du mouvement hélicoïdal. La rotation autour de l'axe central a pour grandeur $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, et la translation suivant cet axe est égale à

$$\frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\omega} = h\omega;$$

par suite le pas de la vis instantanée sur laquelle se meut le corps est

$$h = \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\omega^2} = \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

On observera qu'en général il n'y a pas de point du corps dont la vitesse soit nulle. Il faudrait pour cela que l'on pût avoir en même temps

$$\begin{aligned} \xi + qz - ry &= 0, \\ \eta + rx - pz &= 0, \\ \zeta + py - qx &= 0, \end{aligned}$$

ce qui exige

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0.$$

Dans ce cas le système des rotations est réductible à une rotation unique et tous les points de l'axe de rotation ont une vitesse nulle.

Ce cas est le seul où un point du corps puisse avoir à l'époque considérée une vitesse nulle.

Si p, q, r étaient nuls, le système des rotations formerait un couple et le corps serait animé d'une simple translation instantanée.

Démonstrations directes des résultats précédents.

Démonstration *a priori* de la forme hélicoïdale de tout déplacement infiniment petit.

34. Il est bon de démontrer plus directement les propriétés que nous venons d'obtenir. Nous donnons plus loin les principes de la méthode employée par Chasles dans l'étude du mouvement d'un corps solide, mais nous allons auparavant donner une démonstration presque intuitive de la forme hélicoïdale de tout déplacement infiniment petit d'un corps. Cette raison est si simple qu'il est étonnant qu'elle ne soit pas répandue dans l'enseignement.

Considérons un corps solide auquel on imprime un déplacement infiniment petit. Un point M pris arbitrairement dans le corps viendra occuper une position infiniment voisine M_1; le point M_1, considéré comme position primitive d'un point du corps, viendra dans une position voisine M_2; le point M_2, considéré aussi comme un point du corps pris à l'instant initial, vient occuper une position voisine M_3 et ainsi de suite; on définit ainsi dans la position primitive du corps une suite de points M, M_1, M_2, ... qui, dans le mouvement, viennent M en M_1, M_1 en M_2, M_2 en M_3, ..., en sorte que la courbe sur laquelle ils sont répartis subit un glissement infiniment petit sur elle-même au cours de ce déplacement.

Prenons un point P de cette courbe et soient R et T les rayons de courbure et de torsion en ce point; dans le glissement, le point P vient en P′ sur la courbe; la courbure et la torsion en ce point voisin P′ doivent être encore R et T, puisque l'élément de courbe qui était en P est venu se superposer à l'élément qui entoure le point P′. Donc les différentielles de R et de T sont nulles quand on se déplace sur la courbe; R et T sont constants. Or, les courbes dont les deux courbures sont constantes sont la droite, le cercle et l'hélice.

Dans le cas de l'hélice le mouvement infinitésimal du corps est tel qu'une certaine hélice glisse sur elle-même.

Ce mouvement est donc un mouvement hélicoïdal infiniment petit.

Dans le cas du cercle, le mouvement infiniment petit du corps est tel qu'un cercle du corps glisse sur lui-même; le mouvement est alors une rotation instantanée autour de l'axe du cercle.

Reste le cas de la droite. Dans ce cas une droite du corps glisse infiniment peu sur elle-même; si le corps ne tourne pas en même temps autour de cette droite, nous avons une simple translation. Si le corps tourne autour de la droite, il faut combiner la translation avec la rotation et nous retrouvons un mouvement hélicoïdal infiniment petit.

Analogie entre la théorie précédente et les transformations infinitésimales.

35. On peut traduire en un autre langage et rattacher à un autre ordre d'idées la démonstration précédente qui repose, comme on a pu s'en rendre compte, sur la détermination d'une courbe qui reste inaltérée par la transformation infinitésimale qui constitue le déplacement.

Observons que tout mouvement infiniment petit d'un corps a pour effet de faire correspondre à tout point M du corps un point infiniment voisin M'. Il réalise donc ce que M. Sophus Lie a appelé une transformation infinitésimale ponctuelle, c'est-à-dire une transformation qui, à tout point M (x, y, z) de l'espace, en fait correspondre un autre M' (x', y', z') infiniment voisin.

Puisque le point M' est infiniment voisin de M, on a

$$x' = x + X\delta t, \quad y' = y + Y\delta t, \quad z' = z + Z\delta t,$$

où δt est un coefficient infiniment petit et X, Y, Z des fonctions de x, y, z.

Nous définirons un déplacement comme une transformation qui laisse invariable une certaine fonction des coordonnées des deux points, *à savoir la distance de ces points*.

Ainsi (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) étant deux points, leur distance doit demeurer inaltérée par la transformation infinitésimale considérée. Cette distance a pour valeur

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2};$$

désignons par le symbole δ les variations qui proviennent du passage d'un point à son transformé infiniment voisin. On a

$$\begin{aligned} \delta x &= x' - x = X\delta t, \\ \delta y &= Y\delta t, \\ \delta z &= Z\delta t, \end{aligned}$$

et pareillement

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= X_1\delta t, \\ \delta y_1 &= Y_1\delta t, \\ \delta z_1 &= Z_1\delta t, \end{aligned}$$

où X_1, Y_1, Z_1 sont les fonctions XYZ dans lesquelles on a remplacé xyz par $x_1y_1z_1$.

Écrivons donc que

$$\delta \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=0;$$

il viendra

$$(x-x_1)(\delta x-\delta x_1)+(y-y_1)(\delta y-\delta y_1)+(z-z_1)(\delta z-\delta z_1)=0,$$

ou encore

$$(x-x_1)(X-X_1)+(y-y_1)(Y-Y_1)+(z-z_1)(Z-Z_1)=0.$$

Cette équation doit avoir lieu quels que soient x, y, z, x_1, y_1, z_1. Supposons en particulier x_1, y_1, z_1 infiniment voisin de x, y, z, en sorte que

$$x_1=x+dx, \quad y_1=y+dy, \quad z_1=z+dz,$$

l'équation devient

$$dXdx+dYdy+dZdz=0$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial x}dx^2+\frac{\partial Y}{\partial y}dy^2+\frac{\partial Z}{\partial z}dz^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dydz$$
$$+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right)dzdx+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dxdy=0.$$

Ceci devant avoir lieu quels que soient x, y, z, dx, dy, dz, on a

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Z}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

Ces trois dernières équations nous permettent de poser

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial z}=p,$$
$$\frac{\partial X}{\partial z}=-\frac{\partial Z}{\partial x}=q,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{\partial X}{\partial y}=r,$$

où p, q, r sont des fonctions à déterminer.

On peut écrire, en conséquence,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -r, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = q,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = -p,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -q, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, on a $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} = 0$;

puisque $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, on a $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = 0$,

donc r ne peut dépendre que de z; de même p et q ne peuvent dépendre respectivement que de x et de y.

Mais on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = -\frac{dr}{dz}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} = \frac{dq}{dy},$$

d'où

$$-\frac{dr}{dz} = \frac{dq}{dy};$$

on a aussi

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} = \frac{dr}{dz}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} = -\frac{dp}{dx},$$

donc

$$-\frac{dr}{dz} = \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}.$$

Or, d'un autre côté on a

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -\frac{dq}{dy}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{dp}{dx},$$

donc

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

égalité qui, rapprochée des précédentes, nous prouve que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy} = \frac{dr}{dz} = 0.$$

Ainsi p, q, r sont des constantes, et l'on a ξ, η, ζ désignant trois autres constantes

$$X = \xi + qz - ry, \qquad Y = \eta + rx - pz, \qquad Z = \zeta + py - qx.$$

On s'assurera, du reste, bien aisément que ces expressions de X, Y, Z vérifient l'équation

$$(x - x_1)(X - X_1) + (y - y_1)(Y - Y_1) + (z - z_1)(Z - Z_1) = 0.$$

Ainsi un déplacement infiniment petit d'un corps est la transformation infinitésimale qui laisse invariable la distance de deux points quelconques du corps. En prenant, au lieu de la distance, toute autre fonction des coordonnées de deux points, on arrive à généraliser l'idée de mouvement et, par là, la notion même des propriétés métriques des figures géométriques.

Méthode géométrique de Chasles.

36. Indiquons maintenant les principes de la méthode qui a servi à Chasles pour établir les propriétés du déplacement infiniment petit d'un corps, méthode qui a été reprise depuis par divers géomètres et dont l'ouvrage récent de M. Schœnfliess contient l'entier développement.

Théorème I. — *Soit un segment de droite* AB *qui se déplace dans un plan et soit* A'B' *la position voisine de* AB, *on peut en général amener* AB *en* A'B' *par une rotation autour d'un axe normal au plan.*

Soit α le milieu de AA', β celui de BB' et αO, βO les perpendiculaires élevées en ces points aux cordes respectives AA', BB'; soit O le point de rencontre de ces perpendiculaires. Les triangles AOB, A'OB' sont égaux, car leurs côtés OA et OA', AB et A'B', OB et OB' sont égaux chacun à chacun. Les angles AOB et A'OB' sont donc égaux. Il en résulte que si par une rotation autour de l'axe Δ normal en O au plan on amène OA sur OA', le triangle AOB, entraîné dans ce mouvement, viendra se superposer au triangle A'OB'.

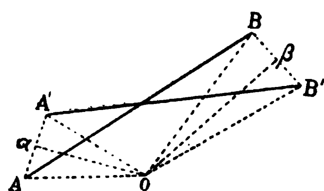


Fig. 42.

On pourrait objecter que les perpendiculaires considérées peuvent

être parallèles. Les cordes AA′ et BB′ le sont aussi dans ce cas, et la figure AA′B′B est alors, soit un parallélogramme, soit un trapèze isocèle.

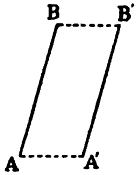


Fig. 43.

Dans le premier cas, les segments AA′ et BB′ sont égaux et une translation amène alors AB en A′B′.

Dans le second cas, soit I le point de rencontre des droites AB et A′B′. Les triangles IAA′, IBB′ sont isocèles et une rotation autour de l'axe Δ, élevée en I perpendiculairement au plan, amènera AB sur A′B′.

Ainsi, sauf le cas de la translation, le théorème est vrai. Encore pourrait-on alléguer que la translation correspond au cas où l'axe de rotation se serait éloigné à l'infini.

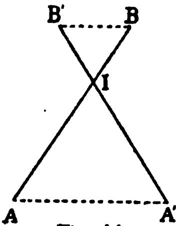


Fig. 44.

Corollaire. — Le déplacement d'une figure plane dans son plan peut s'effectuer par une rotation autour d'un axe normal au plan. On peut, en effet, regarder la figure plane comme liée invariablement à un segment AB et entraînée par lui dans son mouvement. Le théorème étant vrai pour le segment est vrai pour la figure plane.

THÉORÈME II. — *Tout déplacement d'un arc de grand cercle* AB *sur une sphère peut être obtenu par rotation autour d'un diamètre de cette sphère.*

La démonstration est la même que précédemment. Soit A′B′ la position voisine de l'arc AB, et AA′ BB′ deux arcs de grands cercles, dont α, β sont les milieux; élevons en ces points les arcs de grands cercles perpendiculaires à AA′, BB′ respectivement. Soit O un des points de rencontre de ces deux grands cercles. Les triangles sphériques OAB, OA′B′ sont égaux, car les côtés OA et OA′, AB et A′B′, OB et OB′ sont égaux. Une rotation autour du diamètre Δ qui passe en O amène OA sur OA′; le triangle AOB, entraîné dans ce mouvement, vient se superposer au triangle A′OB′.

Le raisonnement est en défaut si les grands cercles perpendiculaires à AA′, BB′ en leurs milieux coïncident.

Appelons π le plan de ce grand cercle unique F perpendiculaire aux arcs AA′, BB′ en leurs milieux. Il est clair que les arcs AB, A′B′ sont symétriques par rapport au plan π; prolongés ils se cou-

pent donc en deux points O, O′ situés dans ce plan, c'est-à-dire sur le grand cercle F. Il suffira, dès lors, d'une rotation autour du diamètre OO′ pour amener AB en A′B′.

Corollaire I. — Tout déplacement d'une figure sphérique de forme invariable sur sa sphère peut être obtenu par rotation autour d'un diamètre. Il suffit, en effet, de considérer un arc de grand cercle AB lié invariablement à la figure. Puisque tout déplacement de AB peut être obtenu par une rotation autour d'un diamètre, il en est de même pour la figure sphérique entraînée par l'arc AB.

Corollaire II. — Tout déplacement d'un corps qui a un point fixe C peut être obtenu par une rotation autour d'un axe issu du point C.

En effet, considérons les points du corps situés sur une sphère Σ de centre C. Ces points forment une figure sphérique F, qui, dans le mouvement du corps, glisse sur la sphère Σ. On peut guider le mouvement du corps par celui de cette figure sphérique F qui lui est invariablement liée.

Or, tout déplacement de F peut être obtenu par une rotation autour d'une droite issue de C; cette rotation permettra donc d'effectuer en même temps le déplacement du corps tout entier.

Théorème III. — *Tout déplacement d'un segment* AB *dans l'espace peut s'obtenir, en général, par une rotation autour d'un axe.*

Soient AB, A′B′ deux positions voisines du segment; menons par la droite AA′ un plan π parallèle à la droite BB′ et projetons AB, BB′ et A′B′ en AB_1, $B_1B'_1$, $A'B'_1$ sur ce plan. Les triangles rectangles ABB_1, $A'B'B'_1$ sont égaux, car les hypoténuses AB, A′B′, ainsi que les côtés BB_1, $B'B'_1$ sont égaux. Donc les côtés AB_1 et $A'B'_1$ sont égaux. Il existera donc un axe Δ normal au plan π tel qu'une rotation autour de Δ amène AB_1 sur $A'B'_1$; dans cette rotation le point B reste à une distance invariable du plan π et vient se superposer au point B′; AB vient donc sur A′B′.

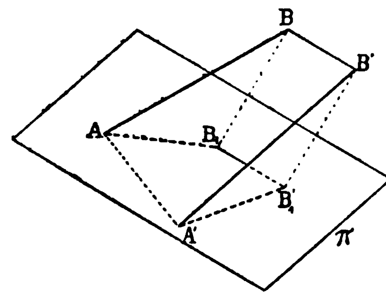


Fig. 45.

Si les cordes AA', BB' étaient égales et parallèles, c'est par une translation que s'effectuerait la superposition de AB sur A'B'.

THÉORÈME IV. — *Tout déplacement d'un corps peut être ramené à deux rotations dont l'une autour d'un axe arbitraire.*

En effet, excluons le cas où le corps serait animé d'une translation; dans ce cas la distribution des vitesses serait la même que si le mouvement résultait d'un couple de rotations.

Puisque le mouvement du corps n'est pas une translation, les cordes AA', BB' des trajectoires de deux points quelconques du corps ne seront pas, en général, égales et parallèles.

Considérons alors le segment AB, on peut l'amener en A'B' par rotation autour d'un certain axe Δ. Imprimons cette rotation non seulement à AB, mais à tout le corps; le corps viendra dans une certaine position qui n'est pas celle qu'il doit occuper définitivement, mais le segment AB a bien sa position définitive A'B'. Pour achever de placer le corps dans sa position finale il faudra donc laisser A'B' immobile, et dès lors le corps n'aura plus qu'à tourner autour de A'B'. Comme la droite A'B' a été prise arbitraire, le théorème est démontré.

THÉORÈME V. — *Tout déplacement d'un corps peut être regardé comme résultant d'une translation et d'une rotation autour d'un axe mené par un point arbitraire du corps.*

Soient, en effet, A un point arbitraire du corps, A' la position voisine. Imprimons à tout le corps une translation rectiligne égale à AA'; le corps n'a pas ainsi la position finale qu'il doit avoir, mais le point A est venu à sa position définitive; pour achever de placer le corps il faudra donc laisser A' immobile; le corps n'aura plus qu'à tourner autour de A'; il suffira, par conséquent, d'après le théorème II (second corollaire), de faire tourner le corps autour d'un axe Δ issu du point A'.

En y supposant infiniment petits les déplacements considérés, les théorèmes précédents donnent les propositions relatives à la distribution de la vitesse que nous avons données plus haut. Les théorèmes III et IV donnent lieu, dans le cas limité, à une remarque intéressante.

Lorsque l'on supposera le segment A' B' infiniment voisin de AB, ne pourra-t-il pas arriver que les segments AB_1, $A'B'_1$ deviennent nuls? S'il en est ainsi, c'est que le plan π est à la limite normal au segment AB; les cordes BB', AA' sont normales à ce segment, qui se trouve ainsi être normal aux trajectoires des points A et B. S'il en est ainsi, le raisonnement ne peut plus être étendu à l'état limite de la figure. Les propositions qui vont suivre montrent sous un autre jour la raison de cette exception.

Relations entre la théorie des complexes linéaires et le déplacement d'un corps solide.

37. Nous avons vu que dans un corps solide en mouvement, le moment résultant du système de segments Σ de coordonnées $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, représentait en chaque point la vitesse de ce point.

Soit M un point, $\overline{MV}$ sa vitesse et Δ un axe issu de M. La projection $\overline{MV'}$ de $\overline{MV}$ sur Δ est, comme on sait, le moment résultant du système de segments Σ par rapport à cet axe. Prenons un second point M_1 sur l'axe Δ, soit $\overline{M_1V_1}$ sa vitesse et $\overline{M_1V'_1}$ la projection de $\overline{M_1V_1}$ sur Δ; il est clair que les segments $\overline{MV'}$ et $\overline{M_1V'_1}$ sont égaux, puisqu'ils représentent tous deux le moment résultant du système Σ par rapport à l'axe Δ. De là ce théorème :

THÉORÈME I. — *Soient* M, M_1 *deux points d'un corps solide en mouvement;* $\overline{MV}$, $\overline{M_1V_1}$ *leurs vitesses; les projections de ces vitesses sur la droite* MM_1 *qui les joint sont deux segments égaux et de même sens.*

Ce théorème si simple a une grande importance. On peut le démontrer directement comme il suit :

Soient x, y, z les coordonnées du point M; x_1, y_1, z_1 celles du point M_1, et

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

la distance MM_1, la vitesse de M projetée sur MM_1 est égale à

$$\frac{x_1-x}{r}\frac{dx}{dt} + \frac{y_1-y}{r}\frac{dy}{dt} + \frac{z_1-z}{r}\frac{dz}{dt},$$

et celle de M_1 à

$$\frac{x_1 - x}{r}\frac{dx_1}{dt} + \frac{y_1 - y}{r}\frac{dy_1}{dt} + \frac{z_1 - z}{r}\frac{dz_1}{dt};$$

il faut vérifier l'égalité de ces expressions :

$$\frac{x_1 - x}{r}\frac{dx}{dt} + \frac{y_1 - y}{r}\frac{dy}{dt} + \frac{z_1 - z}{r}\frac{dz}{dt}$$
$$= \frac{x_1 - x}{r}\frac{dx_1}{dt} + \frac{y_1 - y}{r}\frac{dy_1}{dt} + \frac{z_1 - z}{r}\frac{dz_1}{dt},$$

ou encore

$$(x_1 - x)\, d(x_1 - x) + (y_1 - y)\, d(y_1 - y) + (z_1 - z)\, d(z_1 - z) = 0;$$

égalité évidente puisque

$$d\left\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right\} = 0,$$

la distance MM_1 étant invariable.

Droites normales aux trajectoires de leurs points.

Un cas particulier de ce théorème a joué un rôle important dans un intéressant mémoire de M. Mannhein, inséré au tome XX des *Savants étrangers*. Ce cas est celui où la projection de la vitesse sur l'axe Δ est nulle. Si ce fait a lieu pour un point M de l'axe Δ, il aura lieu pour tout autre point M_1 de cet axe.

Or, pour que la projection de la vitesse soit nulle, il faut et il suffit, la vitesse n'étant pas nulle, que la tangente à la trajectoire soit normale à l'axe Δ. De là ce théorème :

THÉORÈME II. — *Si dans un solide en mouvement une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est normale à la trajectoire de tous ses points.*

Ces droites remarquables normales aux trajectoires de tous leurs points sont les droites de moment nul relativement au système de segments Σ; elles forment donc le complexe linéaire attaché à ce système Σ.

Le plan normal à la trajectoire d'un point M est le plan mené en M perpendiculairement à la vitesse MV, c'est-à-dire perpendiculairement au moment du système Σ au point M; c'est donc le plan polaire de M dans le complexe. De là ce théorème :

THÉORÈME III. — *Le plan normal à la trajectoire d'un point M est le plan polaire de ce point.*

Réciproquement, tout plan d'une figure de forme invariable est à chaque instant normal à la trajectoire d'un de ses points, à savoir, son pôle dans le complexe linéaire.

Les droites conjuguées ont aussi un rôle intéressant; elles donnent lieu tout d'abord à la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Les plans normaux aux trajectoires des différents points d'une droite* D *passent tous par une droite* Δ, *conjuguée de* D *dans le complexe.*

Cela tient précisément à ce que chaque plan normal est le plan polaire du point mobile considéré.

Le lecteur trouvera aisément plusieurs autres propositions analogues à la précédente qui résultent toutes de ce fait que les droites normales aux trajectoires des points du corps forment un complexe linéaire.

Il est clair que si l'on réduit à deux le système des rotations du corps mobile, les droites D, Δ, autour desquelles elles ont lieu, sont deux droites conjuguées dans le complexe linéaire. On peut se donner arbitrairement la droite D, pourvu qu'elle ne fasse pas partie du complexe. Nous retrouvons ainsi le théorème IV du n° 36 et l'exception que nous avions signalée.

Tangentes aux trajectoires des points d'un solide en mouvement.

38. Les droites conjuguées rectangulaires offrent des particularités importantes. Nous avons vu au n° 17 (p. 52) que toute droite D rectangulaire avec sa conjuguée peut se définir comme étant normale au plan polaire d'un de ses points. Appelons M ce point, la droite D sera ainsi tangente à la trajectoire du point M. Réciproquement, toute droite D tangente à la trajectoire d'un de ses points M est normale au plan polaire de ce point. On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME V. — *Les droites tangentes aux trajectoires des points d'un corps en mouvement forment à chaque instant l'ensemble des droites rectangulaires avec leurs conjuguées.*

Propriété cinématique de la caractéristique d'une surface mobile.

On peut donner une autre interprétation cinématique de ces droites.

Soit S une surface liée au corps en mouvement; cette surface en enveloppe une autre (S), qu'elle touche suivant une courbe C; prenons un point M sur cette courbe, la vitesse absolue de M est tangente à la

surface (S); sa vitesse relative est tangente à la surface S. Mais S et (S) sont tangentes au point M, donc la vitesse relative et la vitesse absolue du point M sont tangentes à la surface S. On en peut conclure que la vitesse d'entraînement du point M, qui est la différence géométrique des deux autres, est tangente au point M, à la surface S. La courbe C est donc le lieu des points de la surface S dont la vitesse d'entraînement est tangente à cette surface. La normale à la surface S en M est, dès lors, normale à la trajectoire d'un de ses points; elle fait partie du complexe des droites normales aux trajectoires de leurs points. On a donc ce théorème :

THÉORÈME VI. — *On a la courbe de contact d'une surface* S *avec son enveloppe en cherchant sur* S *les points* M *dont la vitesse d'entraînement est tangente à la surface, ou encore tels que la normale en* M *à la surface* S *fasse partie du complexe linéaire.*

Autre interprétation des droites rectangulaires avec leurs conjuguées.

Appliquons au cas d'un plan π :

Soit D la normale élevée à ce plan en son pôle; toute normale au plan qui fait partie du complexe linéaire doit couper la polaire Δ de D, car elle coupe D à l'infini; et comme Δ est dans le plan π, Δ est le lieu des pieds des normales du plan qui font partie du complexe. Ainsi Δ est la courbe de contact du plan avec son enveloppe. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME VII. — *Les caractéristiques* [1] *des plans d'un corps en mouvement constituent à chaque instant l'ensemble des droites rectangulaires avec leurs conjuguées.*

Normales à la surface décrite par une courbe du corps mobile.

Considérons encore une courbe C du corps mobile, un point M de cette courbe, et cherchons la normale en M à la surface décrite par la courbe C. Cette normale MN est normale à la tangente MT de la courbe C et à la vitesse MV du point M. Elle résulte donc de l'intersection du plan P normal en M à la courbe C avec le plan polaire du point M; elle fait donc partie du complexe. Puisqu'elle coupe la tangente MT en M à la courbe C, elle coupe aussi la conjuguée Δ de MT; elle passe donc au point N où Δ perce le plan P. De là ce théorème :

[1] On sait que, dans une surface variable, on appelle caractéristique la courbe de contact de cette surface avec la surface qu'elle enveloppe.

Théorème VIII. — *Pour avoir la normale en un point* M *à la surface engendrée par une courbe* C *du corps mobile, on prendra le point* N *de rencontre du plan normal en* M *à la courbe* C *avec la conjuguée* Δ *de la tangente* MT; *on joindra le point* M *au point* N, MN *est la normale.*

Supposons, en particulier, que la courbe C se réduise à une droite D, elle engendre une surface réglée, et les normales à cette surface en tous les points de D forment un paraboloïde; d'après le théorème précédent, la droite Δ conjuguée de D est une directrice de ce paraboloïde. Donc :

Théorème IX. — *Si l'on envisage une droite* D *du corps, le paraboloïde des normales relatif à la surface engendrée par la droite* D *s'obtiendra en menant les perpendiculaires à la droite* D *par tous les points de sa conjuguée* Δ.

Lieu des points dont la vitesse passe par un point fixe.

Les formules fondamentales

$$v_{e,x} = \xi + qz - ry, \quad v_{e,y} = \eta + rx - pz, \quad v_{e,z} = \zeta + py - qx$$

se prêtent, il est bon de l'indiquer dès à présent, à la démonstration la plus simple de toutes les propriétés géométriques qui accompagnent le mouvement d'un corps. Cherchons, par exemple, les points du corps dont la vitesse est à un même instant t dirigée vers un point déterminé du corps (x_0, y_0, z_0).

Supposons, comme nous le ferons souvent pour faciliter l'interprétation des résultats, que l'axe Oz soit l'axe du mouvement hélicoïdal tangent, il faudra que p, q, ξ, η soient nuls, et il reste

$$v_{e,x} = -ry, \quad v_{e,y} = rx, \quad v_{e,z} = \zeta.$$

Exprimons que la vitesse du point (x, y, z) est dirigée vers le point x_0, y_0, z_0, nous aurons

$$\frac{x - x_0}{-ry} = \frac{y - y_0}{rx} = \frac{z - z_0}{\zeta}.$$

Ces équations en x, y, z représentent le lieu des points dont les vitesses passent par le point fixe P (x_0, y_0, z_0). Ce lieu est une cubique gauche faisant partie de l'intersection du cylindre de révolution défini par l'équation

$$\frac{x - x_0}{-ry} = \frac{y - y_0}{rx}$$

et du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y - y_0}{-rx} = \frac{z - z_0}{\zeta}.$$

Ces deux surfaces ont en commun la droite $x = 0$, $y = y_0$. Le cylindre a ses génératrices parallèles à Oz; sa section droite est un cercle tracé sur PQ comme diamètre, Q étant la projection de P sur Oz. La cubique passe au point P; l'axe du mouvement hélicoïdal est une asymptote de cette courbe; elle coupe en deux points le cercle de l'infini.

Détermination du mouvement continu quand on connaît les rotations.

39. Soit un trièdre de référence T_1 et a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' les coordonnées de l'origine et les cosinus directeurs des axes d'un second trièdre T par rapport au trièdre T_1.

Si ces douze quantités sont des fonctions connues du temps, un certain mouvement du trièdre T par rapport au trièdre T_1 se trouve défini.

On a vu plus haut comment on peut calculer alors les six fonctions p, q, r, ξ, η, ζ, qui déterminent la distribution des vitesses à chaque époque du mouvement.

On peut se proposer le problème inverse : *Six fonctions p, q, r, ξ, η, ζ étant données, trouver un mouvement continu du trièdre* T *par rapport à un trièdre* T_1 tel que ces six fonctions soient celles qui donnent à chaque instant la distribution des vitesses.

Indétermination du problème.

Le problème n'est pas entièrement déterminé. Prenons, en effet, deux trièdres T_1, T_1' liés invariablement entre eux, et supposons le trièdre T animé par rapport à T_1 d'un mouvement continu tel que p, q, r, ξ, η, ζ soient justement les six fonctions données *a priori*. Le trièdre T sera animé par rapport à T_1' d'un mouvement différent de celui dont il est animé par rapport à T_1, car les douze fonctions du temps a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Cependant il est visible que la distribution des vitesses est la même.

Mais à cette indétermination près du trièdre de référence fixe, le problème est déterminé.

En effet : soient T_1, T'_1 deux trièdres mobiles ou non, l'un par rapport à l'autre, mais tels qu'un même trièdre T soit mobile à la fois par rapport à ces deux trièdres, avec cette particularité que dans les deux mouvements la distribution de la vitesse d'entraînement soit à chaque instant la même; je dis que les trièdres T_1, T'_1 sont liés invariablement l'un à l'autre.

On peut, en effet, concevoir le mouvement du trièdre T par rapport à T'_1 comme la superposition du mouvement de T par rapport à T_1 et de celui de T_1 par rapport à T'_1.

Soient $\overline{v'}$ la vitesse d'entraînement d'un point M du trièdre T dans le mouvement par rapport à T'_1 et $\overline{v}$ la vitesse du point M dans le mouvement d'entraînement de T par rapport à T_1. Enfin, P étant le point de T_1 avec lequel coïncide M à l'instant considéré, appelons $\overline{u}$ la vitesse de P dans le mouvement d'entraînement de T_1 par rapport à T'_1, on a

$$\overline{v'} = \overline{v} + \overline{u}.$$

Mais, par hypothèse $\overline{v'} = \overline{v}$, donc $\overline{u}$ est nul. Tous les points du trièdre T_1 ont ainsi une vitesse nulle à chaque instant par rapport au trièdre T'_1. Cela signifie que le trièdre T_1 est lié invariablement au trièdre T'_1.

Parmi tous ces trièdres T_1, T'_1, ..., liés invariablement les uns aux autres, il en est un avec lequel le trièdre mobile T coïncide à une époque déterminée $t = 0$, par exemple; désignons par T_0 ce trièdre. Ce trièdre T_0 et le mouvement de T par rapport à T_0 sont parfaitement déterminés; on a donc ce théorème :

La connaissance des quantités ξ, η, ζ, p, q, r en fonction du temps permet de définir complètement le mouvement du trièdre T *par rapport à un trièdre* T_0 *avec lequel il coïncide à une époque donnée* $t = 0$. *Le mouvement le plus général qui donne naissance aux fonctions ξ, η, ζ, p, q, r données, s'obtient en rapportant le mouvement précédent à un trièdre quelconque* T_1 *lié invariablement au trièdre* T_0.

On aurait pu dire encore que le mouvement du trièdre T par rapport au trièdre T_1 est complètement déterminé dès que l'on connaît la position initiale T_0 du trièdre T.

Indiquons comment le calcul conduit aux formules finies du mouvement continu quand on se donne les quantités ξ, η, ζ, p, q, r.

Solution analytique.

40. Soit M un point *fixe* et x, y, z ses coordonnées par rapport au trièdre mobile T. En exprimant que la vitesse absolue du point M est nulle, nous avons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\xi + qz - ry + \frac{dx}{dt} = 0, \quad \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt} = 0, \\ &\zeta + py - qx + \frac{dz}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Réciproquement, si (x, y, z) est un système de solution des équations (1), les fonctions x, y, z seront les coordonnées par rapport au trièdre T d'un point M qui est au repos absolu, puisque sa vitesse absolue est constamment nulle.

Les équations (1) sont linéaires; pour les intégrer, considérons un système particulier de solutions x_0, y_0, z_0 correspondant à un certain point fixe M_0, et posons

$$(2)\qquad x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z,$$

on voit que X, Y, Z sont les projections du segment fixe $\overline{M_0M}$ sur les axes du trièdre mobile T. En substituant dans (1) ces expressions de x, y, z, nous avons, après réductions

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &qZ - rY + \frac{dX}{dt} = 0, \quad rX - pZ + \frac{dY}{dt} = 0, \\ &pY - qX + \frac{dZ}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Désignons par (X_0, Y_0, Z_0) (X'_0, Y'_0, Z'_0) (X''_0, Y''_0, Z''_0) trois systèmes de solutions linéairement indépendants des équations (3); le système le plus général de solutions de ces équations sera

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= CX_0 + C'X'_0 + C''X''_0, \\ Y &= CY_0 + C'Y'_0 + C''Y''_0, \\ Z &= CZ_0 + C'Z'_0 + C''Z''_0, \end{aligned} \right.$$

où C, C', C'' sont les trois constantes d'intégration.

Les expressions X_0, Y_0, Z_0 sont les projections d'un segment fixe $\overline{M_0N_0}$, et de même X'_0, Y'_0, Z'_0, X''_0, Y''_0, Y''_0 seront les projections de

deux segments fixes $\overline{M_0N'_0}$, $\overline{M_0N''_0}$; ces trois segments forment autour de M_0 un trièdre.

Les expressions

$$A = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2, \quad A' = X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2, \quad A'' = X_0''^2 + Y_0''^2 + Z_0''^2$$

sont les carrés des longueurs de ces trois segments, elles sont donc constantes. C'est ce que l'on vérifie aisément au moyen des équations différentielles.

On vérifie de même que les expressions

$$\begin{aligned} B &= X'_0X''_0 + Y'_0Y''_0 + Z'_0Z''_0, \\ B' &= X''_0X_0 + Y''_0Y_0 + Z''_0Z_0, \\ B'' &= X_0X'_0 + Y_0Y'_0 + Z_0Z'_0 \end{aligned}$$

sont constantes. Si l'on forme alors l'expression $X^2 + Y^2 + Z^2$, les formules (4) donneront

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= A.C^2 + A'.C'^2 + A''.C''^2 \\ &\quad + 2B.C'C'' + 2B'.C''C + 2B''.CC' \\ &= \varphi(C, C', C''), \end{aligned}$$

expression constante, ce qu'il était facile de prévoir, puisque $X^2 + Y^2 + Z^2$ est le carré de la longueur du segment $\overline{M_0M}$.

Posons alors

$$\begin{aligned} \alpha &= l X_0 + m X'_0 + n X''_0, & \beta &= l Y_0 + m Y'_0 + n Y''_0, & \gamma &= l Z_0 + m Z'_0 + n Z''_0, \\ \alpha' &= l' X_0 + m' X'_0 + n' X''_0, & \beta' &= l' Y_0 + m' Y'_0 + n' Y''_0, & \gamma' &= l' Z_0 + m' Z'_0 + n' Z''_0, \\ \alpha'' &= l'' X_0 + m'' X'_0 + n'' X''_0, & \beta'' &= l'' Y_0 + m'' Y'_0 + n'' Y''_0, & \gamma'' &= l'' Z_0 + m'' Z'_0 + n'' Z''_0, \end{aligned}$$

où $l, m, n, l', m', n', l'', m'', n''$ sont des constantes, et choisissons ces constantes de façon à avoir

$$(5) \qquad \varphi(l, m, n) = 1, \qquad \varphi(l', m', n') = 1, \qquad \varphi(l'', m'', n'') = 1.$$

Si l'on traite pour un instant $l, m, n, l', m', n', l'', m'', n''$ comme les coordonnées rectangulaires de trois points représentatifs P, P', P'', ces équations expriment que ces trois points sont sur un certain ellipsoïde (E). Elles expriment aussi que $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ sont les cosinus directeurs de trois axes fixes issus du point M_0, cosinus directeurs pris par rapport au trièdre mobile.

Cherchons la condition que doivent remplir $l, m, n, l', m', n', l'', m'', n''$ pour que ces trois axes soient rectangulaires.

En remplaçant α, β, γ, α', β', γ' par leurs valeurs, la condition d'orthogonalité peut s'écrire :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\,l' + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\,m' + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,n'\right) = 0,$$

ce qui exprime que P, P' sont sur l'ellipsoïde (E) les extrémités de deux diamètres conjugués. En appliquant la même remarque aux deux autres conditions d'orthogonalité,

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0;$$

on voit que P, P', P'' devront, sur l'ellipsoïde (E), être les extrémités de trois diamètres conjugués.

Supposons l, m, n, l', m', n', l'', m'', n'' ainsi choisis. Alors α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont les cosinus directeurs des axes d'un trièdre trirectangle fixe T_1, cosinus pris par rapport aux axes mobiles.

Il est clair que (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sont trois systèmes de solutions linéairement indépendants des équations (3), et au lieu des formules intégrales (4), nous pouvons prendre

$$\begin{aligned} X &= C.\alpha + C'.\alpha' + C''.\alpha'', \\ Y &= C.\beta + C'.\beta' + C''.\beta'', \\ Z &= C.\gamma + C'.\gamma' + C''.\gamma'', \end{aligned}$$

alors les solutions générales des équations (1) s'écrivent, d'après les formules (2)

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + C.\alpha + C'.\alpha' + C''.\alpha'', \\ y &= y_0 + C.\beta + C'.\beta' + C''.\beta'', \\ z &= z_0 + C.\gamma + C'.\gamma' + C''.\gamma''. \end{aligned} \right.$$

On voit ainsi que C, C', C'' sont les coordonnées constantes par rapport au trièdre fixe T_1 du point fixe M, dont x, y, z sont les coordonnées par rapport au trièdre T, et les formules (6) constituent la transformation de coordonnées qui définit le mouvement continu du trièdre T par rapport au trièdre T_1.

Le problème qui vient d'être résolu a été traité par M. Darboux avec détail au début de ses *Leçons sur la théorie des surfaces.* M. Darboux a rattaché à cette question plusieurs problèmes de géométrie infinitésimale, et montré tout le parti que l'on peut tirer de l'emploi d'un trièdre de référence mobile dans l'étude de telles

questions que compliquerait beaucoup l'emploi des coordonnées habituelles.

Je ne rapporterai ici que ce qui concerne l'application à la géométrie des courbes gauches.

Application aux courbes gauches.

41. Soit une courbe gauche C; O un de ses points; menons à cette courbe la tangente Ox dans un sens fixé *a priori*, soit Oy la normale principale dirigée vers le centre de courbure et Oz la bi-normale prise dans un sens tel qu'une rotation directe de 90° autour de Oz amène Ox sur Oy. Nous disons que le mouvement du trièdre T ainsi construit est dirigé par la courbe.

Cherchons les éléments ξ, η, ζ, p, q, r relatifs à ce trièdre T en supposant que le point O décrive la courbe C avec une vitesse égale à l'unité. Comme ξ, η, ζ sont les projections sur Ox, Oy, Oz de la vitesse d'entraînement de l'origine du trièdre, nous aurons ici

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Désignons par R, T les rayons de courbure et de torsion.

Par un point A fixe, dont x_0, y_0, z_0 seront les coordonnées relatives au trièdre mobile, menons un segment unitaire $\overline{AB}$ parallèle à Ox; les coordonnées relatives de B seront $(x_0 + 1, y_0, z_0)$, et les projections de la vitesse absolue de B sur Ox, Oy, Oz seront, puisque $\frac{ds}{dt} = 1$,

$$v_{a,x} = 1 + q z_0 - r y_0 + \frac{dx_0}{ds}, \quad v_{a,y} = r (r_0 + 1) - p z_0 + \frac{dy_0}{ds},$$

$$v_{a,z} = p y_0 - q (x_0 + 1) + \frac{dz_0}{ds}.$$

Exprimons que la vitesse absolue du point A (x_0, y_0, z_0) est nulle, il viendra

$$0 = 1 + q z_0 - v y_0 + \frac{dx_0}{dt},$$

$$0 = \quad r x_0 - p z_0 + \frac{dy_0}{dt},$$

$$0 = \quad p y_0 - q x_0 + \frac{dz_0}{dt},$$

et la vitesse absolue du point B se réduit aux expressions suivantes :

$$v_{a,x} = 0, \quad v_{a,y} = r, \quad v_{a,z} = -q.$$

Or, d'après la définition du rayon de courbure R, et puisque $ds = dt$, cette vitesse est égale à $\frac{1}{R}$ et dirigée suivant Oy, on a donc

$$v_{a,y} = r = \frac{1}{R}, \quad v_{a,z} = -q = 0.$$

Menons maintenant par A un segment parallèle à Oz, $\overline{AC}$, de longueur égale à l'unité, la vitesse absolue de C est encore dirigée suivant Oy et a pour valeur $\frac{1}{T}$ où T est le rayon de torsion; on devra donc avoir ici

$$\begin{aligned}
0 = v_{a,x} &= 1 + q(z_0 + 1) - ry_0 + \frac{dx_0}{dt},\\
\frac{1}{T} = v_{a,y} &= \qquad rx_0 - p(z_0 + 1) + \frac{dy_0}{dt},\\
0 = v_{a,z} &= \qquad py_0 - qx_0 \quad + \frac{dz_0}{dt},
\end{aligned}$$

expressions qui, en vertu de la fixité du point A, se réduisent à

$$0 = v_{a,x} = q, \quad \frac{1}{T} = v_{a,y} = -p, \quad 0 = v_{a,z} = 0.$$

On trouve donc, indépendamment de $q = 0$, l'équation $p = -\frac{1}{T}$; ainsi, à côté des valeurs 1, 0, 0 de ξ, η, ζ, nous avons pour p, q, r les valeurs

$$p = -\frac{1}{T}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{R}.$$

On peut démontrer que, réciproquement, si un trièdre se meut de telle sorte que η, ζ, q soient nuls, ce trièdre est formé par la tangente, la normale principale et la bi-normale d'une courbe gauche.

M. Darboux, à l'endroit cité, a donné de nombreuses applications des formules précédentes; nous ne donnerons ici que l'exemple suivant :

Développables menées par une courbe gauche donnée.

Soit T *le trièdre dirigé par une courbe* C, *et* OU *une droite issue du sommet de ce trièdre, comment doit varier* OU *pour engendrer une surface développable?*

Soit θ l'angle de OU avec Ox et φ l'angle de Oy avec la trace sur le plan normal yOz du plan mené par Ox et OU.

Appelons l la distance au point O d'un point M pris sur OU, et x, y, z les coordonnées de ce point par rapport au trièdre mobile; on a

$$x = l\cos\theta, \quad y = l\sin\theta\cos\varphi, \quad z = l\sin\theta\sin\varphi.$$

Si la droite OU engendre une développable, le point M où elle touche l'arête de rebroussement a sa vitesse dirigée suivant la tangente à cette arête, c'est-à-dire suivant OU; pour ce point M on a donc

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y} = \frac{v_z}{z},$$

ou, en supposant $\frac{ds}{dt} = 1$,

$$\frac{1 - \frac{1}{R}y + \frac{dx}{ds}}{x} = \frac{\frac{x}{R} + \frac{z}{T} + \frac{dy}{ds}}{y} = \frac{-\frac{y}{T} + \frac{dz}{ds}}{z}.$$

Appelons λ la valeur commune à ces rapports, et remplaçons x, y, z par leurs valeurs en fonction de l, θ et φ. Il viendra, en considérant les deux derniers rapports,

$$\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta\sin\varphi}{T} + \frac{d}{ds}(\sin\theta\cos\varphi) = \left(\lambda - \frac{dl}{l\,ds}\right)\sin\theta\cos\varphi$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\varphi}{T} + \frac{d}{ds}(\sin\theta\sin\varphi) = \left(\lambda - \frac{dl}{l\,ds}\right)\sin\theta\sin\varphi,$$

d'où, en multipliant par $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et ajoutant,

$$-\frac{\sin\theta}{T} - \frac{\sin\varphi\cos\theta}{R} + \sin\theta\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Si, en particulier, on prend $\theta = \frac{\pi}{2}$, on est dans le cas des développables engendrés par des normales, de sorte que la formule précédente généralise la théorie des développées.

Cas où l'axe du mouvement hélicoïdal a une direction fixe dans le corps.

Comme autre exemple je traiterai ce problème qui a une certaine importance par ses applications.

Supposons que l'axe du mouvement hélicoïdal ait une direction fixe *dans le corps;* alors on peut supposer que Oz est cette direction; p, q sont nuls. Par un point fixe A de l'espace de coordonnées relatives (x_0, y_0, z_0), menons un segment unitaire $\overline{AB}$ parallèle à Oz.

Les coordonnées de B sont

$$x_0, y_0, z_0 + 1,$$

sa vitesse absolue a dès lors, comme projections sur les axes mobiles,

$$\xi - ry_0 + \frac{dx_0}{dt}, \quad \eta + rx_0 + \frac{dy_0}{dt}, \quad \zeta + \frac{dz_0}{dt}.$$

Mais d'un autre côté, si l'on cherche la vitesse absolue de A (qui est nulle par hypothèse), *on trouve les mêmes expressions;* ces expressions sont donc toutes les trois nulles et B est fixe. Donc Oz a une direction fixe *aussi dans l'espace*. De là ce théorème fondamental :

Si l'axe du mouvement hélicoïdal a une direction fixe dans le corps, il a aussi une direction fixe dans l'espace.

Du mouvement inverse.

42. Considérons deux trièdres T, T_1 mobiles l'un par rapport à l'autre, le mouvement de T_1 par rapport à T est dit l'inverse du mouvement de T par rapport à T_1.

Vitesse dans le mouvement inverse.

Soit P un point lié au trièdre T et P_1 le point lié au trièdre T_1 avec lequel coïncide le point P à l'époque considérée ; on a ce théorème :

La vitesse d'entraînement de P *dans le mouvement de* T *par rapport à* T_1 *est égale et opposée à la vitesse d'entraînement de* P_1 *dans le mouvement inverse.*

Considérons, en effet, un point M mobile par rapport au trièdre T, et qui coïncide avec le point P à l'époque considérée. La vitesse $\overline{v_1}$ de M par rapport au trièdre T_1 est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement $\bar{v}$ de P par rapport à T_1 et de la vitesse relative $\overline{v'}$ de M par rapport à T ;

$$\overline{v_1} = \bar{v} + \overline{v'}.$$

Mais supposons le point M toujours coïncidant avec le point P_1 ; alors la vitesse $\overline{v_1}$ est nulle et les vitesses $\bar{v}$ et $\overline{v'}$ sont égales et opposées. Or $\bar{v}$ est la vitesse de P par rapport au trièdre T, et $\overline{v'}$ est la vitesse du point M, ou P_1, par rapport au trièdre T. Le théorème est donc démontré.

Application. Soient Σ_1, Σ_2 deux systèmes invariables en mouvement l'un par l'autre. Dans certains cas il y aura avantage à prendre comme trièdre de coordonnées non pas un trièdre lié soit à Σ_1, soit à Σ_2, mais un trièdre T mobile à la fois par rapport à chacun de ces systèmes invariables.

Désignons par $(p_1, q_1, r_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ $(p_2, q_2, r_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ les coordonnées des deux systèmes de rotations instantanés qui se rapportent respectivement au mouvement du trièdre T par rapport au système Σ_1 et au mouvement du trièdre T par rapport au système Σ_2. Le mouvement de Σ_1 par rapport à Σ_2 peut être considéré comme résultant du mouvement de T par rapport à Σ_2 et du mouvement de Σ_1 par rapport à T, lequel est le mouvement inverse de celui de T par rapport à Σ_1; par application de la proposition précédente, la vitesse d'entraînement d'un point de Σ_1 par rapport à Σ_2 sera la différence géométrique entre la vitesse provenant de l'entraînement de T par rapport à Σ_2 et celle provenant de l'entraînement par rapport à Σ_1 du même trièdre T. En projetant sur les axes de ce trièdre et désignant par x, y, z les coordonnées du point entraîné, on aura donc

$$\begin{aligned} v_x &= \xi_2 - \xi_1 + (q_2 - q_1) z - (r_2 - r_1) y, \\ v_y &= \eta_2 - \eta_1 + (r_2 - r_1) x - (p_2 - p_1) z, \\ v_z &= \zeta_2 - \zeta_1 + (p_2 - p_1) y - (q_2 - q_1) x \end{aligned}$$

et v_x, v_y, v_z seront, répétons-le, les projections sur les axes du trièdre T de la vitesse du point dont x, y, z sont les coordonnées actuelles, lié au système Σ_1, dans le mouvement d'entraînement de Σ_1 par rapport à Σ_2.

Ces formules, extrêmement commodes, trouveront plus tard une application dans l'étude du roulement des courbes.

CHAPITRE V

De l'accélération dans le mouvement relatif.

Formules fondamentales.

43. Nous étudierons ultérieurement en détail divers cas de mouvement d'un corps, mais nous devons auparavant compléter, en ce qui concerne les accélérations, le problème, déjà traité pour les vitesses, du changement de système de comparaison.

Accélération absolue.

Un point M se meut par rapport à un trièdre T, lequel à son tour est mobile par rapport à un second trièdre T_1, il s'agit de trouver l'accélération du point M dans son mouvement par rapport au second trièdre.

Soient x, y, z les coordonnées du point P du trièdre T avec lequel coïncide le mobile à l'époque t, nous avons trouvé que les projections de la vitesse absolue du point M avaient pour expressions

$$v_x = \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt},$$
$$v_y = \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt},$$
$$v_z = \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt}.$$

Pour obtenir l'accélération absolue, prenons un point A fixe (c'est-à-dire lié invariablement au trièdre T_1 auquel est rapporté le mouvement dit absolu), et menons $\overline{AV}$ segment égal et parallèle à la vitesse absolue du point M. La vitesse absolue du point V est l'accélération absolue.

Appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point V par rapport au trièdre T mobile, et désignons par $J_{a,x}$, $J_{a,y}$, $J_{a,z}$ les projections de

l'accélération absolue sur les axes de ce trièdre; on aura, puisque l'accélération absolue de M est la vitesse absolue de V,

$$J_{a,x} = \xi + qz_1 - ry_1 + \frac{dx_1}{dt},$$
$$J_{a,y} = \eta + rx_1 - pz_1 + \frac{dy_1}{dt},$$
$$J_{a,z} = \zeta + py_1 - qx_1 + \frac{dz_1}{dt}.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A par rapport aux axes mobiles, on a, v_x, v_y, v_z désignant toujours les projections de la vitesse absolue du point M,

$$x_1 = x_0 + v_x, \quad y_1 = y_0 + v_y, \quad z_1 = z_0 + v_z,$$

d'où

$$J_{a,x} = \left[\xi + qz_0 - ry_0 + \frac{dx_0}{dt}\right] + qv_z - rv_y + \frac{dv_x}{dt},$$
$$J_{a,y} = \left[\eta + rx_0 - pz_0 + \frac{dy_0}{dt}\right] + rv_x - pv_z + \frac{dv_y}{dt},$$
$$J_{a,z} = \left[\zeta + py_0 - qx_0 + \frac{dz_0}{dt}\right] + pv_y - qv_x + \frac{dv_z}{dt}.$$

Formules de Bour.

Or, le point A étant au repos absolu, sa vitesse absolue est nulle; on a donc

$$\xi + qz_0 - ry_0 + \frac{dx_0}{dt} = 0,$$
$$\eta + rx_0 - pz_0 + \frac{dy_0}{dt} = 0,$$
$$\zeta + py_0 - qx_0 + \frac{dz_0}{dt} = 0;$$

et il reste

$$\left\{\begin{aligned} J_{a,x} &= qv_z - rv_y + \frac{dv_x}{dt},\\ J_{a,y} &= rv_x - pv_z + \frac{dv_y}{dt},\\ J_{a,z} &= pv_y - qv_x + \frac{dv_z}{dt},\end{aligned}\right.$$

formules qui sont dues à Bour [1]. Il suffira de les développer pour atteindre le but que nous nous sommes proposé.

[1] *Journal de Liouville*, 2me série, t. VIII, 1863.

En transportant dans $J_{a,x}$ les valeurs de v_x, v_y, v_z, on trouve

$$J_{a,x} = q\left[\zeta + py - qx + \frac{dz}{dt}\right] - r\left[\eta + rx - pz + \frac{dy}{dt}\right]$$
$$+ \frac{d}{dt}\left[\xi + qz - ry + \frac{dx}{dt}\right] = (\xi' + q\zeta - r\eta) + q'z - r'y$$
$$+ p(px + qy + rz) - (p^2 + q^2 + r^2)x + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2},$$

les lettres accentuées désignant les dérivées prises par rapport au temps des variables correspondantes.

Posons, pour abréger,

$$\xi' + q\zeta - r\eta = \xi_1, \quad \eta' + r\xi - p\zeta = \eta_1, \quad \zeta' + p\eta - q\xi = \zeta_1,$$
$$2H = (px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

on pourra écrire

$$J_{a,x} = \xi_1 + q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2},$$

et, de même,

$$J_{a,y} = \eta_1 + r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y} + 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2},$$
$$J_{a,z} = \zeta_1 + p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial z} + 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Interprétation des formules.

44. Nous allons interpréter ces formules. Nous avons appelé P le point lié au trièdre mobile avec lequel coïncide le point mobile M à l'époque t considérée. Si, dans les formules précédentes, on laissait à x, y, z leurs valeurs actuelles, mais en les considérant comme des constantes, on aurait évidemment l'accélération du point P entraîné par le trièdre mobile, c'est-à-dire l'accélération d'entraînement. Désignons par $\overline{J}_e$ cette accélération et par $J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z}$ ses projections sur les axes du trièdre mobile. $\overline{J}_e$ se déduit de $\overline{J}_a$ en y supposant x, y, z constants; on a donc

Accélération d'entraînement.

$$J_{e,x} = \xi_1 + q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x},$$
$$J_{e,y} = \eta_1 + r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y},$$
$$J_{e,z} = \zeta_1 + p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Je désigne par $\overline{J_c}$ le segment dont les projections sur les axes mobiles sont

$$J_{c,x} = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \quad J_{c,y} = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$
$$J_{c,z} = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Enfin il est visible que $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ sont les projections sur les axes mobiles de l'accélération relative $\overline{J_r}$ du point M dans son mouvement par rapport au trièdre T. Les formules qui donnent $J_{a,x}$ s'écrivent alors

$$J_{a,x} = J_{r,x} + J_{e,x} + J_{c,x},$$
$$J_{a,y} = J_{r,y} + J_{e,y} + J_{c,y},$$
$$J_{a,z} = J_{r,z} + J_{e,z} + J_{c,z}.$$

Ce qui exprime que $\overline{J_a}$ est la somme géométrique des segments $\overline{J_r}, \overline{J_e}, \overline{J_c}$.

Accélération complémentaire.

Nous connaissons la signification de $\overline{J_r}, \overline{J_e}$, il est aisé d'interpréter aussi $\overline{J_c}$.

Menons par le point M le segment $\overline{\Omega}$ dont les projections sont p, q, r sur les axes mobiles. On reconnaît dans ce segment la rotation qui, jointe à une vitesse de translation égale à la vitesse du point P du corps, produirait dans le corps la distribution de vitesse qui résulte de son déplacement effectif.

Menons aussi le segment $\overline{MV_r}$ qui représente la vitesse relative. On voit que J_c est le double du segment qui représente le moment du segment $\overline{\Omega}$ par rapport au point V_r. Ce segment J_c porte le nom d'*accélération complémentaire* ou de *Coriolis*.

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème de Coriolis.

L'accélération absolue est la somme géométrique de trois segments :

1° L'accélération relative du point par rapport au système de comparaison mobile;

2° L'accélération d'entraînement, c'est-à-dire celle que possède le point du système de comparaison mobile avec lequel coïncide le mobile à l'époque considérée;

3° L'accélération complémentaire ou de Coriolis, qui est le double du moment du segment $\overline{\Omega}$ qui représente la rotation ins-

tantanée transportée au point M, *par rapport à l'extrémité de la vitesse relative.*

Cette proposition est habituellement connue sous le nom de théorème de Coriolis.

L'accélération complémentaire est nulle dans trois cas. D'abord, bien évidemment, dans le cas du repos relatif, car alors le point V_r coïncide avec le point M; en second lieu si la vitesse relative est constamment parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal, car alors V_r est sur le segment $\bar{\Omega}$; et enfin si le segment $\bar{\Omega}$ est nul, auquel cas il existe une translation tangente.

De la distribution de l'accélération dans un corps en mouvement.

45. Les expressions de $J_{e,x}$, $J_{e,y}$, $J_{e,z}$ que nous avons trouvées, nous donnent la distribution de l'accélération dans un solide en mouvement. Ces formules, en posant

$$J_{e',x} = \xi_1 + q'z - r'y, \quad J_{e',y} = \eta_1 + r'x - p'z,$$
$$J_{e',z} = \zeta_1 + p'y - q'x,$$
$$J_{e'',x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad J_{e'',y} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad J_{e'',z} = \frac{\partial H}{\partial z},$$

peuvent s'écrire

$$J_{e,x} = J_{e'x} + J_{e'',x}, \quad J_{e,y} = J_{e',y} + J_{e'',y}, \quad J_{e,z} = J_{e',z} + J_{e'',z}.$$

Elles expriment que l'accélération d'entraînement est la somme de deux segments. L'un $\overline{J_{e'}}$ de projections $J_{e',x}$, $J_{e',y}$, $J_{e',z}$, l'autre $\overline{J_{e''}}$ de projections $J_{e'',x}$, $J_{e'',y}$, $J_{e'',z}$. Le premier est le moment par rapport au point mobile M du système de segments Σ_1 de coordonnées

$$p', \quad q', \quad r', \quad \xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1.$$

Pour interpréter le second segment, menons par l'origine des coordonnées une parallèle OA à l'axe instantané de rotation, et soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur cette droite. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point Q sont données par les formules

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r} = \frac{px_1 + qy_1 + rz_1}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{px + qy + rz}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Les projections du segment $\overline{MQ}$ sont donc

$$x_1 - x = p\frac{px+qy+rz}{p^2+q^2+r^2} - x = \frac{p(px+qy+rz)-(p^2+q^2+r^2)x}{p^2+q^2+r^2}$$
$$= \frac{\partial H}{\partial x} : \frac{1}{p^2+q^2+r^2};$$

et de même

$$y_1 - y = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{1}{p^2+q^2+r^2}; \quad z_1 - z = \frac{\partial H}{\partial z}\frac{1}{p^2+q^2+r^2}.$$

Considérons alors le segment $\overline{MD}$ égal au produit de $\overline{MQ}$ par $p^2+q^2+r^2 = \omega^2$; les projections de ce segment $\overline{MD}$ seront précisément

$$(p^2+q^2+r^2)(x_1 - x) = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Donc $\overline{MD}$ est le second segment cherché.

Centre des accélérations

Contrairement à ce qui a lieu pour la vitesse, il y a toujours un point du système T mobile dont l'accélération est nulle. Ce point a reçu le nom de *centre des accélérations*.

Les coordonnées de ce point doivent vérifier les équations

$$J_{e,x} = \xi_1 + q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$
$$J_{e,y} = \eta_1 + r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$
$$J_{e,z} = \zeta_1 + p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial z} = 0;$$

nous obtenons ainsi trois équations linéaires dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} -(q^2+r^2) & pq - r' & pr + q' \\ pq + r' & -(r^2+p^2) & qr - p' \\ pr - q' & qr + p' & -(p^2+q^2) \end{vmatrix} = (pp'+qq'+rr')^2 - (p^2+q^2+r^2)(p'^2+q'^2+r'^2)$$
$$= -[(qr'-rq')^2 + (rp'-pr')^2 + (pq'-qp')^2].$$

Le déterminant n'est nul que si l'on a

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r};$$

donc, sauf cette exception, il y a toujours un centre des accélérations.

Supposons que l'exception précédente ait lieu à tout instant du mouvement; on voit que $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ sont constants, ce qui signifie que l'axe du mouvement hélicoïdal tangent a une direction fixe dans le corps, et, par suite, aussi dans l'espace (p. 126).

Prenons alors Oz parallèle à cette direction, invariable à la fois dans le corps et dans l'espace; p et q seront nuls, ξ_1, η_1, ζ_1 se réduiront à

$$\xi_1 = \xi' - r\eta, \quad \eta_1 = \eta' + r\xi, \quad \zeta_1 = \zeta',$$

et l'on trouvera

$$\begin{aligned} J_{e,x} &= \xi_1 - r'y - r^2 x, \\ J_{e,y} &= \eta_1 + r'x - r^2 y, \\ J_{e,z} &= \zeta_1 = \zeta'. \end{aligned}$$

Cas où il y a une infinité de centres des accélérations.

On voit alors qu'il n'y aura pas de centre des accélérations tant que ζ' ne sera pas nul.

Il est facile d'interpréter cette condition $\zeta' = 0$. Elle exprime que ζ est constant; or, dans le cas actuel, les formules qui donnent la distribution de la vitesse se réduisent à

$$v_x = \xi - ry, \quad v_y = \eta + rx, \quad v_z = \zeta.$$

Le plan xOy a une orientation fixe dans l'espace, comme l'axe Oz auquel il est normal; il se déplace donc en restant parallèle à lui-même et la vitesse de ce déplacement est précisément ζ.

Si ζ est constant, c'est que le mouvement de xOy est uniforme. Dans ce cas, il y a une infinité de points d'accélération nulle; ils sont répartis sur la droite

$$\xi_1 - r'y - r^2 x = 0, \quad \eta_1 + r'x - r^2 y = 0.$$

CHAPITRE VI

Mouvement d'une figure plane dans son plan.

46. Parmi les divers mouvements d'un corps solide, il en est deux particulièrement importants que nous allons étudier en détail. Le premier est celui dans lequel un plan du corps glisse sur lui-même; le second celui dans lequel une sphère du corps glisse sur elle-même, ou, ce qui revient au même, dans lequel le corps a un point fixe.

Examinons d'abord le premier mouvement. Appelons π le plan du corps qui glisse sur lui-même; tout plan du corps parallèle au plan π glisse lui aussi sur lui-même, en sorte que tout point M du corps décrit une courbe tracée dans un plan parallèle au plan π; on peut ajouter que si M_0 est la projection du point M sur le plan π, le point M_0 décrit dans le plan sur lequel glisse le plan π la même courbe plane que le point M décrit dans l'espace.

On peut donc se borner à étudier le mouvement des points situés dans le plan π et l'on est alors ramené au problème du mouvement d'une figure plane qui glisse dans son plan.

Formules de la vitesse dans le cas du glissement d'un plan sur lui-même.

Prenons le plan π pour plan xOy; tout point pris dans le plan π a sa vitesse dans ce plan, par hypothèse, donc la projection v_z de cette vitesse sur Oz est nulle identiquement; comme on a

$$v_z = \zeta + py - qx,$$

il faut que $\zeta = p = q = 0$. Posons alors $\omega = r$ et nous trouvons que *pour tout point du corps* on a

$$v_x = \xi - \omega y, \quad v_y = \eta + \omega x, \quad v_z = 0.$$

Si ω était nul, le corps serait animé d'une translation instantanée;

ce cas exclu, on peut poser

$$x_0 = -\frac{\eta}{\omega}, \quad y_0 = \frac{\xi}{\omega}.$$

Les expressions précédentes deviennent alors

$$v_x = -\omega(y - y_0), \quad v_y = \omega(x - x_0), \quad v_z = 0;$$

elles nous prouvent que le corps est animé d'une rotation instantanée ω autour d'un axe Δ parallèle à Oz et issu du point I du plan π dont (x_0, y_0) sont les coordonnées.

Conformément à la remarque déjà faite, nous nous bornerons à étudier le mouvement du plan π sur lui-même, et nous pourrons dire alors que la *distribution des vitesses dans le plan π, dans son mouvement de glissement sur lui-même, est la même que s'il tournait avec la vitesse ω autour du point* I, qui a reçu le nom de *centre instantané de rotation.*

Centre instantané.

Un point M du plan π décrit dans ce mouvement une courbe dont la tangente porte la vitesse du point M. Cette vitesse est normale, d'après le théorème précédent, à la droite IM et égale au produit de IM par ω. On peut en conclure que IM est la normale à la trajectoire du point M.

De là ce théorème :

Propriété des normales.

Les normales aux trajectoires de tous les points du plan mobile vont toutes passer au centre instantané de rotation.

Courbes enveloppes.

Considérons une courbe C liée au plan π; cette courbe en enveloppe une autre (C). Soit P le point où la courbe C touche (C). Ce point P varie en général sur la courbe C; cette courbe est sa trajectoire relative dans le plan π; la courbe (C) est sa trajectoire absolue.

Par hypothèse C et (C) sont tangentes en P; donc la vitesse absolue et la vitesse relative de P sont portées par une même droite PT tangente commune à C et à (C). La vitesse d'entraînement de P, qui est la différence géométrique entre ces deux vitesses, est donc portée aussi par PT; mais cette vitesse d'entraînement est normale à la droite IP; donc IP doit être normale à la courbe C au point P. Donc, au point P où C touche son enveloppe, la normale à C va passer au centre instantané.

Réciproquement, soit P un quelconque des pieds de normales issues à la courbe C du centre instantané I. Le point P est variable sur

la courbe C avec le temps; sa vitesse relative et sa vitesse d'entraînement sont toutes deux portées par la tangente PI à la courbe C. Sa vitesse absolue, somme géométrique de ces vitesses, est donc portée par la tangente PT. Mais alors PT est tangente à la trajectoire absolue (C) du point P, et dès lors la courbe (C) est une courbe fixe à laquelle la courbe C reste tangente; cette courbe (C) est une branche de l'enveloppe de la courbe C.

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème :

Les points où une courbe C, *entraînée par le plan mobile, touche son enveloppe, sont les pieds des normales issues du point* I (centre instantané) *à la courbe C.*

Soient x, y les coordonnées du point de contact P; la vitesse relative du point P a pour projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; cette vitesse étant normale à la droite IP, d'après ce qui précède on est en droit de poser,

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(x - x_0),$$

où λ est une fonction auxiliaire.

La vitesse relative du point P a pour valeur

$$v_r = \lambda\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

et la vitesse d'entraînement,

$$v_e = \omega\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

en sorte que la vitesse absolue a pour expression

$$v_a = (\lambda + \omega)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Soient sur les courbes C et (C), A et A' deux points correspondants, c'est-à-dire les points où les courbes C, (C) sont en contact à une certaine époque. Désignons par s, s' les arcs AP, A'P comptés sur les courbes C et (C), on a

$$\frac{ds}{dt} = v_r = \lambda\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\frac{ds'}{dt} = v_a = (\omega + \lambda)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

d'où résulte

$$\frac{d(s' - s)}{dt} = \frac{ds'}{dt} - \frac{ds}{dt} = \omega\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Glissement.

La différence $(s' - s)$ représente le *glissement* des courbes C et (C) l'une sur l'autre.

Courbes roulettes.

47. Le lieu des points de la figure mobile avec lesquels vient successivement coïncider le centre instantané de rotation est une courbe que je désignerai par I_m. Le point I vient aussi coïncider successivement avec divers points de la figure fixe; soit I_f le lieu de ces points.

La courbe I_m est la trajectoire relative du centre instantané; la courbe I_f est sa trajectoire absolue.

Les courbes I_m et I_f s'appellent *roulettes*.

Soit $\overline{V}$ la vitesse du point I sur sa trajectoire relative; la vitesse absolue de I est égale à la somme géométrique de la vitesse relative $\overline{V}$ et de la vitesse d'entraînement; or, celle-ci est nulle. Donc, *la vitesse absolue et la vitesse relative du centre instantané sont constamment égales.* Nous donnerons à cette vitesse $\overline{V}$ le nom de vitesse propre au centre instantané.

Vitesse propre au centre instantané.

On tire de l'égalité de la vitesse relative et de la vitesse absolue du centre instantané une double conclusion :

1° *La courbe I_m reste constamment tangente à la courbe fixe I_f.*

En effet, la vitesse absolue de I est tangente à I_f, sa vitesse relative à I_m; puisque ces deux vitesses coïncident I_m et I_f ont même tangente au point I;

2° La courbe I_f est ainsi une branche de l'enveloppe de la courbe I_m. Je dis que le *glissement est constamment nul.*

Reprenons, en effet, les notations précédentes, où I_m est la courbe C, I_f la courbe (C) et I le point P. Soient encore A, A' deux points correspondants sur I_m et I_f et appelons s, s' les arcs AI, A'I sur les courbes I_m et I_f, la formule

$$\frac{d(s'-s)}{dt} = \omega\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

nous donne, puisque $x = x_0$, $y = y_0$,

$$\frac{d(s'-s)}{dt} = 0,$$

ou, puisque s et s' s'annulent en même temps quand I vient en A et A',

$$s' - s = 0.$$

Les arcs AI, A'I sont constamment égaux, et *la courbe* I_m *roule sur la courbe* I_f SANS GLISSER.

La démonstration employée montre que la courbe I_m *est la seule* qui roule sans glissement sur une des branches de son enveloppe. Nous avons trouvé, en effet,

$$\frac{d(s'-s)}{dt} = \omega \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

donc si $s' - s$ est nul c'est que $x = x_0$, $y = y_0$, le point P est donc le centre instantané, et la courbe C ne peut être que I_m et la courbe (C) ne peut être que I_f.

Généralité du roulement sans glissement.

De là ce théorème fondamental :

Tout déplacement continu d'une figure plane dans son plan peut être obtenu, et d'une seule manière, par le roulement sans glissement d'une courbe I_m *sur une autre* I_f. *Le point de contact des deux* ROULETTES *est le centre instantané de rotation.*

Mouvement d'un corps dont un plan glisse sur lui-même.

Nous avons remarqué que si un corps se meut de sorte qu'un de ses plans glisse sur lui-même, on peut se borner à étudier le glissement d'une figure tracée dans ce plan. Ce glissement résulte du roulement d'une courbe I_m sur une courbe fixe I_f. Considérons alors les cylindres Γ_m, Γ_f, dont ces courbes sont les sections droites, il est clair que le mouvement du corps consistera simplement dans le roulement sans glissement du cylindre Γ_m sur le cylindre Γ_f. A chaque instant il y aura un mouvement de rotation tangent dont l'axe sera la génératrice de contact des cylindres Γ_m et Γ_f.

De l'accélération dans une figure plane en mouvement. — Courbures.

Simplification des formules de l'accélération dans le cas du glissement d'un plan sur lui-même.

48. Lorsqu'une figure plane glisse dans son plan les formules générales relatives à l'accélération subissent de grandes simplifications. Dans ce cas l'axe de la rotation instantanée a une direction invariable normale au plan de la figure. De plus, puisque la figure glisse sur elle-même la quantité ζ est nulle. Nous nous trouvons donc dans le cas examiné à la fin du nº 46.

Nous allons, du reste, reprendre les formules générales en y intro-

duisant les hypothèses qui caractérisent le mouvement considéré. Nous supposerons, pour plus de généralité, un point M (x, y) mobile par rapport aux axes mobiles Ox, Oy dans le plan xOy et nous allons chercher les expressions des projections $J_{a,x}$, $J_{a,y}$ de son accélération absolue sur les axes Ox, Oy.

Les formules générales où l'on fait, comme plus haut,

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \zeta = 0, \quad z = 0,$$

nous donnent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{a,x} &= \xi_1 - \omega' y - \omega^2 x - 2\omega \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ J_{a,y} &= \eta_1 + \omega' x - \omega^2 y + 2\omega \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

on a, conformément aux notations générales

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt}, \quad \xi_1 = \frac{d\xi}{dt} - \omega\eta, \quad \eta_1 = \frac{d\eta}{dt} + \omega\xi.$$

Choix particulier des axes.

Une simplification importante très commode pour l'interprétation des formules résulte du choix suivant des axes :

Nous supposons Ox, Oy pris de sorte qu'à l'époque particulière t que nous considérons le point O soit le centre instantané; Ox la tangente commune aux roulettes dans le sens du mouvement du centre instantané. Alors Oy est la normale commune aux deux roulettes.

D'après cette hypothèse, les coordonnées

$$x_0 = -\frac{\eta}{\omega}, \quad y_0 = \frac{\xi}{\omega}$$

du centre instantané sont nulles à l'époque considérée, on a donc à cet instant $\xi = \eta = 0$, et, par suite, ξ_1, η_1 se réduisent à

$$\xi_1 = \frac{d\xi}{dt}, \quad \eta_1 = \frac{d\eta}{dt}.$$

Observons maintenant que $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$ sont les projections sur Ox, Oy de la vitesse propre au centre instantané; ces projections se

réduiront ici (puisque $\xi = \eta = 0$) à

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{\omega}\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\eta_1}{\omega}, \quad \frac{dy_0}{dt} = \frac{\xi_1}{\omega}.$$

Or, par hypothèse, cette vitesse a le sens de Ox, en la désignant par V on aura donc

$$V = -\frac{\eta_1}{\omega}, \quad 0 = \frac{\xi_1}{\omega}.$$

Ainsi on a simplement $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = -\omega V$ et les formules (1) deviennent

$$(2) \quad \begin{cases} J_{a,x} = -\omega^2 x - \omega' y - 2\omega \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ J_{a,y} = -\omega V - \omega^2 y + \omega' x + 2\omega \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2}. \end{cases}$$

Signalons que, par suite du choix particulier des axes, les formules relatives aux vitesses se réduisent à

$$(3) \quad \begin{cases} v_{a,x} = -\omega . y + \dfrac{dx}{dt}, \\ v_{a,y} = +\omega . x + \dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Si dans ces formules on suppose x, y constants, on obtient la vitesse et l'accélération d'entraînement.

Centre de courbure de la courbe trajectoire d'un point.

49. Comme application, cherchons le centre de courbure de la courbe (M) trajectoire d'un point M lié invariablement à la figure.

Pour définir le point M, nous supposerons que sur la droite OM on a choisi un sens définissant un axe Δ; soit θ l'angle dont doit tourner Ox dans le sens direct pour venir s'appliquer sur Δ, et soit r le nombre qui mesure le segment $\overline{OM}$ sur l'axe Δ. Les quantités r, θ définiront le point M.

Le centre de courbure μ de la trajectoire du point M est évidemment sur l'axe Δ, car cet axe est la normale en M à la courbe (M), O étant le centre instantané; il suffit donc de connaître le nombre ρ qui mesure le segment $\overline{O\mu}$ sur l'axe Δ pour déterminer complètement le point μ.

Appelons v la vitesse du point M, la projection de l'accélération de

M sur la normale Δ sera exprimée par

$$\frac{v^2}{\rho - r},$$

car $\rho - r$ est le nombre qui mesure le rayon de courbure $\overline{M\mu}$ sur l'axe Δ (1).

Or, d'un autre côté, la projection de l'accélération sur Δ a pour expression

$$J_{e,x} \cos\theta + J_{e,y} \sin\theta,$$

on peut donc écrire

$$\frac{v^2}{\rho - r} = -(\omega^2 x + \omega' y)\cos\theta - (\omega V + \omega^2 y - \omega' x)\sin\theta,$$

et comme

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad v^2 = \omega^2 r^2,$$

il viendra

$$\frac{\omega^2 r^2}{\rho - r} = -\omega^2 r - \omega V \sin\theta.$$

On pose

$$k = \frac{V}{\omega}$$

Formule de Savary.

et il vient alors

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \sin\theta},$$

formule célèbre connue sous le nom de *formule de Savary*.

On peut généraliser la formule de Savary.

Courbure des enveloppes.

50. Considérons une courbe C entraînée par la figure de forme invariable. Soit (C) sa courbe enveloppe, P le point de contact à l'instant considéré.

Il s'agit de trouver le centre de courbure de la courbe (C).

Regardons le point P comme un point mobile dont C est la trajectoire relative et (C) la trajectoire absolue.

Menons comme précédemment un axe Δ par le point O et par le point P; cet axe est normal à la fois aux courbes C et (C); soit encore

(1) Si, sur la normale à la trajectoire d'un point mobile M, on ne s'astreint pas à prendre comme sens positif celui qui va de M au centre de courbure, le rayon de courbure devient susceptible d'un signe. Si R est le nombre qui mesure le rayon de courbure sur la normale, on voit facilement que $\frac{v^2}{R}$ est encore le nombre qui mesure la projection de l'accélération sur la normale.

θ l'angle qui fixe l'orientation de cet axe autour de O; appelons r_1 la distance OP prise avec son signe; appelons aussi r, ρ les distances OM, Oμ, où M est le centre de courbure de C, qui est connu, et μ le centre de courbure de (C), que nous nous proposons de déterminer.

En désignant par x, y les coordonnnées du point P de contact nous avons déjà vu qu'on pouvait poser

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(x - x_0).$$

On en déduit par différentiation, en posant $\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) - \lambda'(y - y_0),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \quad \lambda\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) + \lambda'(x - x_0),$$

ou encore, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs expressions,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2(x - x_0) + \lambda\frac{dy_0}{dt} - \lambda'(y - y_0),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda^2(y - y_0) - \lambda\frac{dx_0}{dt} + \lambda'(x - x_0).$$

Introduisons maintenant les hypothèses

$$x_0 = y_0 = 0, \quad \frac{dx_0}{dt} = \mathrm{V}, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0,$$

il viendra

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x,$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\lambda^2 x - \lambda' y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\lambda^2 y + \lambda' x - \lambda \mathrm{V}. \end{aligned} \right.$$

L'accélération normale du point P *sur la courbe* C aura cette valeur

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{r - r_1} = \frac{\lambda^2 r_1^2}{r - r_1}$$

en la comptant sur l'axe normal Δ. Mais elle a aussi pour expression

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = -\lambda^2(x\cos\theta + y\sin\theta) \\ -\lambda'(y\cos\theta - x\sin\theta) - \lambda V\sin\theta.$$

On a $x = r_1\cos\theta$, $y = r_1\sin\theta$, donc il vient

$$\frac{\lambda^2 r_1^2}{r - r_1} = -\lambda^2 r_1 - \lambda V\sin\theta,$$

Vitesse du point de contact.

ce qui s'écrit encore

$$(6) \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{\lambda}{V\sin\theta}.$$

Dans cette formule, r, r_1, V, θ sont connus; elle nous donne λ, et par suite nous fournit la vitesse relative du point de contact P sur la courbe enveloppée C.

Cherchons maintenant l'*accélération absolue* du point P; cette accélération est donnée par les formules générales

$$(2) \qquad \begin{cases} J_{a,x} = -\omega^2 x - \omega' y - 2\omega\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ J_{a,y} = -\omega V - \omega^2 y + \omega' x + 2\omega\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2}. \end{cases}$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$ par $-\lambda y$, $\frac{dy}{dt}$ par λx et de même $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ par leurs valeurs (5); il vient

$$\begin{aligned} J_{a,x} &= -\omega^2 x - \omega' y - 2\omega\lambda x - \lambda^2 x - \lambda' y \\ &= -(\omega + \lambda)^2 x - (\omega' + \lambda')y \\ J_{a,y} &= -\omega V - \omega^2 y + \omega' x - 2\omega\lambda . y - \lambda^2 y + \lambda' x - \lambda V \\ &= -(\omega + \lambda)V - (\omega + \lambda)^2 . y + (\omega' + \lambda')x; \end{aligned}$$

et l'on aura, pour la vitesse absolue,

$$\begin{aligned} v_{a,x} &= -\omega y + \frac{dx}{dt} = -(\omega + \lambda)y, \\ v_{a,y} &= \quad \omega x + \frac{dy}{dt} = \quad (\omega + \lambda)x. \end{aligned}$$

La projection de l'accélération absolue sur l'axe Δ normal est égale

à l'accélération normale prise avec son signe sur cet axe,

$$\frac{(v_{a,x})^2 + (v_{a,y})^2}{\rho - r_1} = \frac{(\omega + \lambda)^2 r_1^2}{\rho - r_1},$$

car $\rho - r_1$ représente le nombre qui mesure sur l'axe Δ le rayon de courbure de la courbe enveloppe (C). On aura une seconde expression de la projection de l'accélération totale en projetant sur Δ les composantes $J_{a,x}$, $J_{a,y}$ de cette accélération :

$$J_{a,x} \cos\theta + J_{a,y} \sin\theta = -(\omega + \lambda)^2 r_1 - (\omega + \lambda) V . \sin\theta,$$

en tenant compte des relations

$$x = r_1 \cos\theta, \quad y = r_1 \sin\theta.$$

Il vient ainsi

$$\frac{(\omega + \lambda)^2 r_1^2}{\rho - r_1} = -(\omega + \lambda)^2 r_1 - (\omega + \lambda) V \sin\theta$$

ou encore

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_1} = \frac{\omega + \lambda}{V \sin\theta}.$$

Formule générale relative aux courbures.

Retranchons membre à membre les équations (6) et (7), il viendra, puisque $\frac{1}{k} = \frac{\omega}{V}$,

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \sin\theta}.$$

Considérons le point M, centre de courbure de la courbe C; la formule que nous venons d'obtenir, rapprochée de la formule (4) nous prouve que le point μ que nous cherchions est le centre de courbure de la trajectoire du point M. De là ce beau théorème :

Quand une courbe C se déplace dans son plan, le centre de courbure de son enveloppe coïncide avec le centre de courbure de la trajectoire du centre de courbure de la courbe C.

Cette proposition, comme celles que nous avons déjà obtenues, peut s'établir par la géométrie; mais la généralité des formules, en ce qui concerne les signes, exige alors certaines précautions qui rendent la démonstration géométrique *rigoureuse* moins simple que celle à laquelle nous nous sommes arrêtés.

La formule de Savary a, comme on vient de le voir, une grande portée puisqu'elle fournit à la fois les centres de courbure des trajectoires des points et ceux des courbes enveloppes.

Définition géométrique du paramètre k.

Nous allons chercher une interprétation de la quantité k qui figure dans cette formule.

Appliquons au mouvement absolu du centre instantané les formules générales qui fournissent l'accélération.

Les formules fondamentales

$$J_{a,x} = -\omega^2 x - \omega' y - 2\omega \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$J_{a,y} = -\omega V - \omega^2 y + \omega' x + 2\omega \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}$$

nous donnent, en faisant $x = x_0$, $y = y_0$,

$$J_{a,x} = -\omega^2 x_0 - \omega' y_0 - 2\omega \frac{dy_0}{dt} + \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

$$J_{a,y} = -\omega V - \omega^2 y_0 + \omega' x_0 + 2\omega \frac{dx_0}{dt} + \frac{d^2 y_0}{dt^2}.$$

Mais on a

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\quad \frac{dx_0}{dt} = V,\quad \frac{dy_0}{dt} = 0,$$

il reste donc

$$J_{a,x} = \frac{d^2 x_0}{dt^2},\qquad J_{a,y} = -\omega V + 2\omega V + \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \omega V + \frac{d^2 y_0}{dt^2}.$$

La première équation nous montre que l'accélération tangentielle absolue et l'accélération tangentielle relative du centre instantané sont égales, ce que nous savions déjà, car les vitesses absolue et relative étant l'une et l'autre égales à V, $\frac{dV}{dt}$ sera la valeur commune des deux accélérations tangentielles.

Soient O_f, O_m les centres de courbure des courbes I_f et I_m et R_f, R_m les nombres qui mesurent les segments $\overline{OO_f}$ et $\overline{OO_m}$; R_f et R_m sont les rayons de courbure de I_f, I_m pris avec leurs signes sur l'axe Oy normal à la fois aux deux courbes et faisant avec Ox un angle positif de 90°. La projection de l'accélération totale absolue sur Oy est

$$J_{a,y} = \frac{V^2}{R_f};$$

la projection de l'accélération relative est

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{V^2}{R_m}.$$

L'équation $J_{a,y} = \omega V + \frac{d^2 y_0}{dt^2}$ nous donnera donc

$$\frac{V^2}{R_f} = \omega V + \frac{V^2}{R_m},$$

d'où

(8) $$\frac{1}{k} = \frac{\omega}{V} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m},$$

formule *rigoureusement générale,* si l'on tient compte des signes conformément aux conventions faites [1].

Construction de la formule de Savary.

51. Il est aisé maintenant de construire la formule de Savary. Si par rotation d'un angle θ, Ox vient s'appliquer sur l'axe Δ, Oy vient en même temps s'appliquer sur un axe $O\Delta'$ rectangulaire avec Δ. Prenons $O\Delta$, $O\Delta'$ pour axes de coordonnées et soient

$$\frac{X}{r} + \frac{Y}{u} = 1 \qquad (MO_m)$$

$$\frac{X}{\rho} + \frac{Y}{u'} = 1 \qquad (\mu O_f),$$

Fig. 46.

les équations des droites MO_m, μO_f rapportées à ces axes. Les coordonnées de O_m, O_f sont $(R_m \sin\theta, R_m \cos\theta)$ $(R_f \sin\theta, R_f \cos\theta)$, et en exprimant que ces coordonnées vérifient respectivement les équations précédentes, on trouvera

$$\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{u} = \frac{1}{R_m}, \qquad \frac{\sin\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{u'} = \frac{1}{R_f},$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta + \left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u}\right)\cos\theta.$$

[1] On pourrait être tenté de démontrer cette formule en appliquant aux courbes I_m et I_f le théorème relatif aux enveloppes, puisque I_f est une branche de l'enveloppe de I_m. Mais ce théorème a été déduit des formules (6), (7) qui supposent r différent de zéro. On pourrait donc émettre le doute qu'il soit applicable aux courbes I_f, I_m. Il n'en est rien sans doute, et ces courbes ne font pas exception; mais un raisonnement direct était nécessaire pour le démontrer.

En rapprochant de la formule de Savary on voit que $u' = u$.

Aussi les droites MO_m, μO_f se coupent en un point H situé sur la perpendiculaire élevée en O à la droite OM. De là, la construction suivante du centre de courbure de la trajectoire d'un point M lié à la figure mobile :

On joint M au centre instantané O et au centre de courbure de la roulette mobile O_m, on prend le point H de rencontre de MO_m avec la perpendiculaire en O à OM et l'on mène la droite HO_f; cette droite coupe OM au centre de courbure μ de la trajectoire du point M.

Cette construction fait intervenir les centres O_m, O_f; mais la formule de Savary ne contient cependant que la fonction

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

des rayons de courbure des roulettes.

Si l'on modifiait les deux courbes I_m, I_f de sorte que $\frac{1}{k}$ conservât *à l'instant considéré* sa valeur, les centres de courbure des trajectoires resteraient les mêmes, du moins pour l'instant considéré.

Seconde construction de la formule de Savary.

Soit sur Oy le point K dont k est l'ordonnée. Une première hypothèse consiste à supposer que la courbe I_m se réduit à la droite Ox, alors on pourra prendre pour I_f le cercle dont K est le centre, comme le prouve la formule

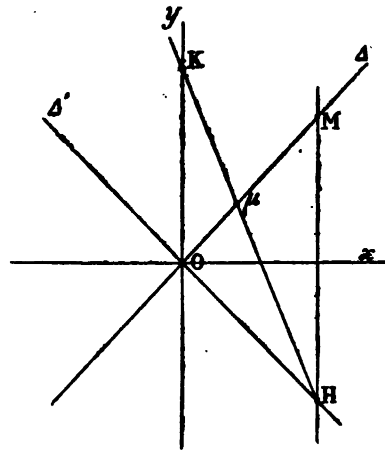


Fig. 47.

$$\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{k}$$

où l'on fait $\frac{1}{R_m} = 0$. Alors O_m est à l'infini sur Oy et O_f est en K. La construction précédente s'applique. Il faudra joindre le point mobile M à O_m, c'est-à-dire mener MH parallèle à Oy jusqu'au point de rencontre H avec la perpendiculaire en O à OM. On joint ensuite le point H au point O_f ou K, et le point de rencontre μ de cette droite HK avec OM est le centre de courbure cherché.

Troisième construction de la formule de Savary.

On pourrait, au contraire, supposer que c'est la courbe I_f qui a été réduite à la droite Ox, alors I_m sera réductible à un cercle dont le centre sera le point K' symétrique du point K. Dans ce cas O_f est à l'infini sur Oy, O_m est en K'; pour construire le point μ joignons le point mobile M au point K', prenons le point de rencontre H de MK' avec

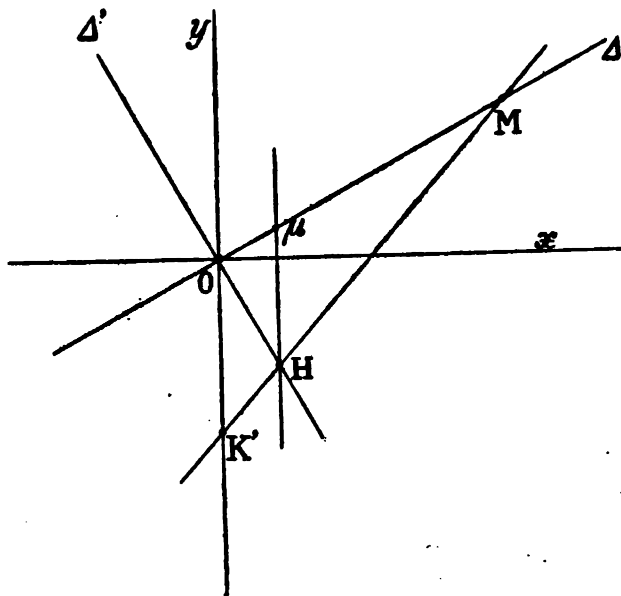


Fig. 48.

la perpendiculaire en O à OM et menons $H\mu$ parallèle à Oy, le point μ où cette parallèle coupe OM est le centre de courbure cherché.

Remarque générale.

La correspondance des points M, μ sur la droite Δ est une homographie; mais c'est une homographie d'espèce particulière, car les deux points doubles propres à toute division homographique sur une droite sont ici confondus et confondus avec le point O (1).

(1) Dans le plan la transformation qui fait passer du point M au point μ est une transformation *bi-rationnelle quadratique*. Désignons par x, y les coordonnées de M, par ξ, η celles de μ, on a

$$\xi = \frac{kyx}{x^2+y^2+ky}, \quad \eta = \frac{ky^2}{x^2+y^2+ky},$$

et l'on en déduit, en résolvant en x, y,

$$x = -\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta}, \quad y = -\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2-k\eta}.$$

Au point de vue métrique il y a dans toute homographie entre les points d'une droite deux points remarquables, celui qui correspond au point à l'infini de la droite et celui auquel correspond le point à l'infini.

Cercle des inflexions.

52. Cherchons d'abord le point M pour lequel le point μ est à l'infini; la trajectoire du point M ayant son centre de courbure à l'infini, ce point M sera un point d'inflexion sur sa trajectoire.

La troisième construction du point μ nous prouve que le point μ sera à l'infini lorsque la parallèle $H\mu$ à Oy sera elle-même à l'infini; K'H doit donc être parallèle à Δ' ou perpendiculaire à Δ. On voit ainsi que l'angle OMK' doit être droit et le lieu du point M, quand Δ tourne autour de O, est le cercle décrit sur OK' comme diamètre. Ce cercle a reçu le nom de *cercle des inflexions;* il est le lieu des points de la figure qui, à l'instant considéré, sont des points d'inflexion sur leurs trajectoires.

Sens de la concavité.

Soit A le point autre que le point O où l'axe Δ coupe le cercle des inflexions; désignons par r_∞ la valeur correspondante de r; puisque $\rho = \infty$ pour $r = r_\infty$, on a

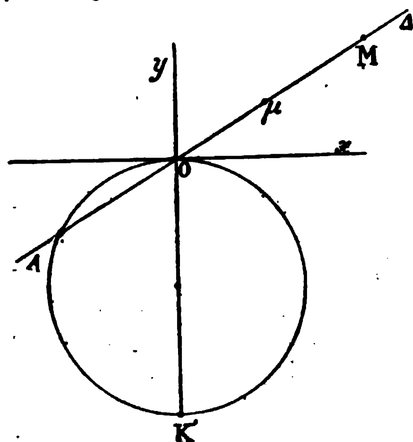


Fig. 40.

$$-\frac{1}{r_\infty} = \frac{1}{k \sin\theta},$$

donc pour un couple quelconque de points M, μ on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \sin\theta} = -\frac{1}{r_\infty}$$

ou encore

$$(\rho - r)(r_\infty - r) = r^2,$$

on voit ainsi que les segments $\overline{M\mu}$ et $\overline{MA}$ ont toujours le même sens; autrement dit, *la concavité de la trajectoire d'un point* M *est toujours tournée vers le point* A *où la normale à la trajectoire coupe le cercle des inflexions.*

Centres de courbure des enveloppes de droites.

Cherchons maintenant quelle est la limite du point μ lorsque M s'éloigne à l'infini sur l'axe Δ. Nous devrons faire $r = \infty$; soit ρ_∞ la

valeur correspondante, et β le point correspondant sur Δ; on a

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \frac{1}{k \sin \theta} = -\frac{1}{r_\infty},$$

ce qui prouve que β est le symétrique du point A par rapport au centre instantané O. Le lieu du point β est le cercle symétrique du cercle des inflexions; il est décrit sur OK comme diamètre.

Ce cercle possède une propriété importante qu'on peut énoncer comme il suit :

Le cercle décrit sur OK *comme diamètre est le lieu des centres de courbure des enveloppes des droites de la figure mobile.*

Soit, en effet, D une droite de la figure mobile et (D) son enveloppe.

Menons un axe Δ par le point O normalement à D; le point P où Δ coupe la droite D est le point de contact de la droite D avec son enveloppe (D).

Or, pour avoir le centre de courbure μ de cette courbe enveloppe, il faudra chercher le centre de courbure de la trajectoire du centre de courbure de D; comme ce dernier est à l'infini sur Δ, il faut en conclure que le point μ cherché est le point β qui correspond à l'infini sur la droite Δ. Le théorème est donc démontré.

On reconnaît que le même point β correspond à toutes les enveloppes des droites parallèles à la droite D et qui font partie de la figure mobile. Cela n'est pas surprenant, car il est évident que deux droites parallèles qui restent à une distance invariable l'une de l'autre ne peuvent qu'envelopper des courbes parallèles.

Cercle des rebroussements.

Considérons en particulier celle des parallèles à la droite D qui passe par le point β, appelons D' cette parallèle. Le point β est tout à la fois le point où D' touche son enveloppe (D') et le centre de courbure de (D'); c'est dire que la courbe enveloppe (D') a un point de rebroussement au point β.

On ne manquera pas d'observer que la droite D' passe au point K; on a donc ce théorème :

Les droites de la figure qui, à l'instant considéré, touchent leur enveloppe en un point de rebroussement concourent toutes au point K, *et le lieu des points de rebroussement relatifs à ces diverses droites est le cercle décrit sur* OK *comme diamètre.*

Pour ce motif on donne à ce cercle le nom de *cercle des rebroussements.*

Étude des trajectoires dans le voisinage d'un point.

53. Comme application des méthodes que nous avons suivies jusqu'ici, je vais montrer comment on peut étudier les trajectoires des points de la figure mobile dans le voisinage d'une position particulière.

Nous avons défini au n° 21 les accélérations d'ordre supérieur. Les formules de Bour peuvent être étendues au cas des accélérations d'ordre quelconque.

Soient, en effet, $J_{a,x}$, $J_{a,y}$, $J_{a,z}$ les projections sur les axes mobiles de l'accélération absolue du premier ordre. Menons par un point fixe (x_1, y_1, z_1) un segment équipollent à l'accélération du premier ordre; soit U l'extrémité de ce segment. La vitesse absolue du point U est l'accélération du second ordre. En appliquant les formules générales relatives aux vitesses et tenant compte de la fixité du point x_1, y_1, z_1, on trouvera, par le même procédé qui a donné les équations de Bour, les projections de l'accélération du second ordre :

$$J'_{a,x} = q\,J_{a,z} - r\,J_{a,y} + \frac{d\,J_{a,x}}{dt},$$

$$J'_{a,y} = r\,J_{a,x} - p\,J_{a,z} + \frac{d\,J_{a,y}}{dt},$$

$$J'_{a,z} = p\,J_{a,y} - q\,J_{a,x} + \frac{d\,J_{a,z}}{dt}.$$

On pourrait généraliser et étendre aux accélérations des autres ordres.

Montrons comment on peut ainsi parvenir à une première étude des points de rebroussement dans les trajectoires. On aura ici, en s'en tenant à l'accélération d'entraînement,

$$J'_{e,x} = -\,\omega\,J_{e,y} + \frac{d\,J_{e,x}}{dt},$$

$$J'_{e,y} = +\,\omega\,J_{e,x} + \frac{d\,J_{e,y}}{dt}.$$

Or, on a trouvé avant toute simplification due au choix des axes

$$J_{e,x} = \xi' - \omega\eta - \omega' y - \omega^2 x,$$
$$J_{e,y} = \eta' + \omega\xi + \omega' x - \omega^2 y,$$

d'où se déduisent sans peine pour $J'_{e,x}$, $J'_{e,y}$ les valeurs

$$J'_{e,x} = \xi'' - 2\omega\eta' - \omega'\eta - \omega^2\xi - 3\omega\omega' x - (\omega'' - \omega^3)y,$$
$$J'_{e,y} = \eta'' + 2\omega\xi' + \omega'\xi - \omega^2\eta - 3\omega\omega' y + (\omega'' - \omega^3)x.$$

Introduisons ici l'hypothèse que l'origine est le centre instantané et Ox la tangente aux courbes I_m, I_f; on a vu que

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi' = 0, \quad \eta' = -\omega V.$$

Il vient alors

$$v_{e,x} = -\omega y, \quad v_{e,y} = \omega x,$$
$$J_{e,x} = -\omega' y - \omega^2 x, \quad J_{e,y} = \eta' + \omega' x - \omega^2 y,$$
$$J'_{e,x} = (\xi'' - 2\omega\eta') - 3\omega\omega' x - (\omega'' - \omega^3)y,$$
$$J'_{e,y} = \eta'' - 3\omega\omega' y + (\omega'' - \omega^3)x.$$

Rapportons les courbes trajectoires à des axes fixes qui, à l'instant considéré, coïncident avec les axes mobiles Ox, Oy. On aura, en appelant X, Y les coordonnées du point M au bout du temps t,

$$X = X_0 + X'_0 t + X''_0 \frac{t^2}{2} + X'''_0 \frac{t^3}{6} + \lambda t^4 + \ldots,$$
$$Y = Y_0 + Y'_0 t + Y''_0 \frac{t^2}{2} + Y'''_0 \frac{t^3}{6} + \mu t^4 + \ldots.$$

Or, on a

$$X_0 = x, \quad Y_0 = y, \quad X'_0 = -\omega y, \quad Y'_0 = \omega x,$$
$$X''_0 = J_{e,x}, \quad Y''_0 = J_{e,y}, \quad X'''_0 = J'_{e,x}, \quad Y'''_0 = J'_{e,y};$$

il vient donc

$$X = x - \omega y . t + J_{e,x} \frac{t^2}{2} + J'_{e,x} \frac{t^3}{6} + \lambda t^4 + \ldots,$$
$$Y = y + \omega x . t + J_{e,y} \frac{t^2}{2} + J'_{e,y} \frac{t^3}{6} + \mu t^4 + \ldots.$$

Posons alors

$$X_1 = \quad x(X - x) + y(Y - y),$$
$$Y_1 = -y(X - x) + x(Y - y),$$

il viendra

$$X_1 = A\frac{t^2}{2} + B\frac{t^3}{6} + \lambda' t^4 + \ldots$$
$$Y_1 = Ct + D\frac{t^2}{2} + E\frac{t^3}{6} + \mu' t^4 + \ldots$$

où l'on aura

$$\begin{aligned}
A &= x J_{e,x} + y J_{e,y} = \eta' . y - \omega^2(x^2+y^2) = -\omega V . y - \omega^2(x^2+y^2),\\
B &= x J'_{e,x} + y J'_{e,y} = (\xi'' - 2\omega\eta')x + \eta'' y - 3\omega\omega'(x^2+y^2),\\
C &= -y v_{e,x} + x v_{e,y} = \omega(x^2+y^2),\\
D &= -y J_{e,x} + x J_{e,y} = \omega'(x^2+y^2) + \eta' x,\\
E &= -y J'_{e,x} + x J'_{e,y} = -(\xi'' - 2\omega\eta')y + \eta'' x + (\omega'' - \omega^3)(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Les quantités A, B, C, D, E n'étant pas nulles en général, on voit que les courbes seront tangentes chacune respectivement à la droite $X_1 = 0$. Si $A = 0$, on voit que la tangente $X_1 = 0$ a avec la trajectoire du point M un contact du second ordre; et en effet le point M (x, y) est alors sur le cercle des inflexions.

Si l'on suppose le point M pris justement au centre instantané, on trouve

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= (\xi'' - 2\omega\eta')\frac{t^3}{6} + \lambda t^4 + \ldots,\\ Y &= -\omega V \cdot \frac{t^2}{2} + \eta''\frac{t^3}{6} + \mu t^4 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et l'on voit que, dans ce cas, le point M est un rebroussement de première espèce sur sa courbe trajectoire; Oy est la tangente de rebroussement, et, par rapport à Ox, *la courbe est du même côté que le point* K', car le terme principal de Y est

$$-\omega V \frac{t^2}{2} = -\omega^2 k \frac{t^2}{2}.$$

Cherchons dans quelles conditions d'autres points de rebroussement pourront exister pour les trajectoires.

Il faudra que C puisse s'annuler pour d'autres points que le centre instantané, donc $\omega = 0$. Cette condition, jointe à celles de $\xi = 0$, $\eta = 0$, que l'on suppose déjà, exprime que la vitesse d'entraînement est nulle dans toute la figure à l'instant considéré. La figure passe par une *position stationnaire*, $\frac{1}{k}$ est nul et les roulettes ont à cet instant un contact du second ordre, car $R_f = R_m$.

Les équations du centre instantané

$$\omega x_0 + \eta = 0, \quad \omega y_0 - \xi = 0,$$

différentiées deux fois, donnent

$$\begin{aligned}
&\omega' x_0 + \omega x'_0 + \eta' = 0, && \omega' y_0 + \omega y'_0 - \xi' = 0,\\
&\omega'' x_0 + 2\omega' x'_0 + \omega x''_0 + \eta'' = 0, && \omega'' y_0 + 2\omega' y'_0 + \omega y''_0 - \xi'' = 0.
\end{aligned}$$

Or, ici on a $\xi = \eta = x_0 = y_0 = y'_0 = 0$, $x'_0 = V$, il en résulte (puisque $\omega = 0$)

$$\eta'' = -2\omega' V, \quad \xi'' = 0, \quad \xi' = 0, \quad \eta' = 0.$$

On trouve alors

$$A = 0, \quad B = -2\omega' V . y, \quad C = 0, \quad D = \omega' (x^2 + y^2),$$
$$E = -2\omega' V . x + \omega'' (x^2 + y^2),$$

d'où

$$X_1 = -\frac{\omega' V}{3} y . t^3 + \lambda' t^4 + \dots,$$
$$Y_1 = \frac{\omega'}{2} (x^2 + y^2) \frac{t^2}{2} + E \frac{t^3}{6} + \mu' t^4 + \dots.$$

Dans ce cas, tous les points de la figure sont des points de rebroussement *de première espèce* sur leurs trajectoires. Mais si l'on suppose le point mobile pris sur la tangente Ox aux courbes I_m, I_f le terme en t^3 disparaît de X_1, car $y = 0$, et l'on constate alors que la courbe présente un rebroussement *de seconde espèce.*

Voyons ce que donne le point qui coïncide avec le centre instantané dans ce cas. Les formules (9) où l'on fait $\omega = 0$, $\xi'' = 0$, $\xi' = \eta' = 0$ se réduisent à

$$X = \quad \lambda t^4 + \dots,$$
$$Y = -\frac{\omega' V}{3} t^3 + \mu t^4 + \dots$$

où λ n'est pas nul; on constate qu'il n'y a plus de rebroussement pour ce point.

Si d'autres singularités se présentaient, la méthode précédente s'y appliquerait encore avec facilité.

Théorème relatif au point K'.

54. Dans certains cas on se donne un point et sa trajectoire ou une courbe C et son enveloppe. Le centre instantané une fois trouvé, la détermination des courbures dépend seulement de la connaissance soit du point K soit du point K'.

Le théorème suivant permet, dans plusieurs cas, d'arriver aisément à construire le point K' :

THÉORÈME. — *Le point* K' *a même puissance par rapport au cercle qui a pour centre un point* M *de la figure et qui passe au*

centre instantané, et par rapport au cercle décrit sur le rayon de courbure $M\mu$ *comme diamètre.*

En effet, le cercle de centre M, qui passe au point O, a pour équation, x, y étant les coordonnées de M,

$$X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY = 0.$$

La puissance du point K′ $(0, -k)$ est donc égale à

$$k^2 + 2ky.$$

Appelons ξ, η les coordonnées du point μ, l'équation du cercle décrit sur $M\mu$ comme diamètre sera

$$X^2 + Y^2 - (\xi + x)X - (\eta + y)Y + \xi x + \eta y = 0;$$

la puissance du point K′ par rapport à ce cercle est donc

$$k^2 + (\eta + y)k + \xi x + \eta y.$$

Or, on a

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\rho}{r}$$

et

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \sin\theta};$$

en se souvenant que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on en tire [1]

$$\xi = \frac{kxy}{x^2 + y^2 + ky}, \quad \eta = \frac{ky^2}{x^2 + y^2 + ky}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} k^2 + (\eta + y)k + \xi x + \eta y &= k^2 + \frac{2ky(x^2 + y^2 + ky)}{x^2 + y^2 + ky} \\ &= k^2 + 2ky, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Centre des accélérations. **55.** Nous avons trouvé pour expressions réduites des projections de l'accélération d'entraînement :

$$J_x = -\omega^2 x - \omega' y, \quad J_y = -\omega^2 y + \omega' x - \omega V.$$

---

(1) Page 151, note.

Si l'on cherche le centre des accélérations, c'est-à-dire le point dont l'accélération totale est nulle, on trouve

$$x + \frac{\omega'}{\omega^2} y = 0, \qquad -y + \frac{\omega'}{\omega^2} x - k = 0.$$

La quantité k ne dépend que des éléments géométriques du mouvement, des rayons de courbure des courbes I_f, I_m et nullement de la rapidité avec laquelle on fait rouler ces courbes l'une sur l'autre; tout ce qui concerne les courbures des trajectoires est indépendant de la loi du mouvement, mais il n'en est plus de même du centre des accélérations, il dépend de $\frac{\omega'}{\omega^2}$, qui varie selon la rapidité du roulement de I_m sur I_f.

Lieu du centre des accélérations quand la loi du temps varie.

Le centre des accélérations est toujours sur le cercle des inflexions. Ce cercle est, en effet, le lieu des points pour lesquels le centre de courbure de la trajectoire est à l'infini; or, dans ces conditions, l'accélération normale est nulle. Le cercle des inflexions est donc le lieu des points dont l'accélération normale est nulle. Pour le centre des accélérations, l'accélération totale est nulle; il en est donc de même de l'accélération normale, et, par suite, le centre des accélérations est sur le cercle des inflexions. Or, ce cercle est indépendant de $\frac{\omega'}{\omega^2}$, c'est-à-dire de la loi du mouvement, donc *si l'on fait varier la loi du mouvement, le cercle des inflexions est le lieu du centre des accélérations.*

C'est ce que l'on constate encore en éliminant $\frac{\omega'}{\omega^2}$ entre les équations précédentes; on trouve ainsi

$$x^2 + y^2 + ky = 0.$$

Lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle.

On vient de voir que le cercle des inflexions est le lieu des points dont l'accélération normale est nulle; on trouvera facilement que le cercle

$$\frac{\omega'}{\omega^2}(x^2 + y^2) - kx = 0$$

est le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle.

Ce cercle passe au centre instantané et coupe à angle droit le cercle des inflexions; il dépend de la loi du temps. Le point autre que le

centre instantané où il coupe le cercle des inflexions est précisément le centre des accélérations [1].

Le lecteur prouvera de même que le lieu des points dont l'accélération totale a une valeur donnée est un cercle concentrique au centre des accélérations.

Notons enfin que si l'on transporte l'origine au centre des accélérations, les formules deviennent

$$J_x = -\omega^2 x - \omega' y, \quad J_y = -\omega^2 y + \omega' x,$$

en sorte que :

Au point de vue des accélérations tout se passe comme si la figure plane tournait d'une façon continue autour du centre des accélérations, avec la vitesse angulaire variable ω.

---

[1] Il est bon de faire remarquer que si la vitesse angulaire est constante, le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle se réduit à l'axe Oy. *Le point* K' *se trouve alors être le centre des accélérations.*

CHAPITRE VII

Exemples et développements sur le mouvement d'une figure plane.

---

56. Pour définir le mouvement d'une figure plane dans son plan on peut se donner les deux courbes I_f, I_m qui roulent l'une sur l'autre sans glissement ainsi que la vitesse propre au centre instantané, ou, ce qui revient au même, la vitesse angulaire ω.

Cycloïde. Le cas le plus célèbre est celui du mouvement cycloïdal dans lequel un cercle roule sans glisser sur une droite donnée.

Un point quelconque de la circonférence de ce cercle décrit alors une *cycloïde*. Le centre instantané O est le point de contact actuel de la droite et du cercle, et OM est la normale à la cycloïde engendrée par le point M. Ici R_f est infini, et R_m est égal au rayon a du cercle roulant; en sorte que le point K' est le centre O_m de ce cercle. Le cercle décrit sur OO_m comme diamètre est le cercle des inflexions.

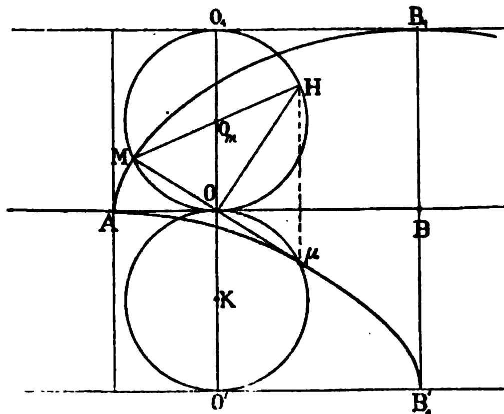


Fig. 50.

Pour avoir le centre de courbure μ de la cycloïde il est naturel

d'appliquer la troisième construction de la formule de Savary. Le point H où MO_m vient couper la normale en O au rayon vecteur OM est évidemment le point diamétralement opposé à M dans le cercle roulant. Ainsi, H est lié au cercle C comme le point M lui-même et décrit comme lui une cycloïde.

Maintenant, pour construire le point μ il suffit de mener $H\mu$ parallèle à O_mO et de prendre l'intersection avec MO. Comme O_m est le milieu de MH, O est le milieu de $M\mu$ et l'on voit ainsi que μ *est symétrique de* M *par rapport au centre instantané* O.

En outre, $H\mu$ est le double de O_mO et est égal au diamètre OO_1 du cercle roulant. Le lieu du point μ résulte donc de celui du point H par une simple translation égale et parallèle à O_1O. Si C′ est le cercle symétrique de C par rapport au point O, le point μ est lié invariablement à ce cercle qui roule sur la droite $O'B'_1$ parallèle à AB.

Le lieu du point μ est une cycloïde superposable à la première.

La cycloïde se trouve ainsi être une solution de ce problème général traité par M. Puiseux : trouver une courbe superposable à sa développée.

Cycloïdes raccourcies et allongées.

Si l'on prend le point décrivant M à l'intérieur du cercle roulant C, la trajectoire n'est plus une cycloïde proprement dite, mais bien une *cycloïde raccourcie,* courbe qui n'a pas de rebroussements, mais qui possède des points d'inflexion et qui serpente entre deux droites parallèles en se reproduisant périodiquement comme la cycloïde.



Fig. 51.

Si le point décrivant est, au contraire, extérieur au cercle, on obtient une *cycloïde allongée.* Cette courbe, qui se reproduit périodiquement, est dépourvue de rebroussements et d'inflexions; mais elle forme une suite de boucles comprises entre deux droites parallèles et ces boucles donnent lieu à des points doubles.



Fig. 52.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le théorème suivant :

Si un cercle C *roule sur une droite* Δ *d'un mouvement uniforme*

et si Δ glisse sur elle-même, en même temps, d'un mouvement uniforme, un point de la circonférence du cercle C décrit une cycloïde raccourcie si Δ glisse dans le sens où roule le cercle, et une cycloïde allongée dans le cas contraire.

Mouvement inverse du mouvement cycloïdal.

57. Au lieu de faire rouler un cercle sur une droite, faisons rouler une droite Δ sur un cercle C, nous aurons le mouvement inverse du mouvement cycloïdal ; un point quelconque de la droite Δ décrit alors une développante de cercle. Par contre, un point quelconque lié invariablement à la droite Δ décrira la courbe que l'on obtient en portant une longueur constante à partir du point de contact sur la tangente à une développante du cercle.

Ces courbes : développante du cercle, cycloïde et cycloïdes allongées ou raccourcies, sont comprises dans une famille générale de courbes, à savoir celles que l'on obtient dans le mouvement épicycloïdal général.

Mouvement épicycloïdal général.

Le mouvement épicycloïdal général se réalise en faisant rouler sans glissement un cercle sur un autre ; appelons C_m, C_f ces deux cercles. Si C_f et C_m deviennent séparément des droites, on obtient les deux mouvements précédents.

Les mouvements épicycloïdaux se distinguent les uns des autres par la position relative des deux cercles roulants.

Si les deux cercles roulants se touchent extérieurement, on a le mouvement *épicycloïdal* proprement dit.

S'ils se touchent intérieurement, on a le mouvement *hypocycloïdal.*

Quelques auteurs appellent aussi mouvement épicycloïdal extérieur celui que nous appelons épicycloïdal, et mouvement épicycloïdal intérieur le mouvement hypocycloïdal.

On appelle épicycloïdes les courbes décrites par les points de la circonférence du cercle roulant dans le cas du mouvement épicycloïdal. Les points intérieurs au cercle roulant décrivent des *épicycloïdes raccourcies* et les points extérieurs des *épicycloïdes allongées.*

On appelle *hypocycloïdes* les courbes décrites par les points de la circonférence du cercle roulant dans le cas du mouvement hypocycloïdal ; les points intérieurs au cercle roulant décrivent des *hypocycloïdes raccourcies* et les points extérieurs décrivent des *hypocycloïdes allongées.*

Les épi- et hypocycloïdes, les épi- et hypocycloïdes allongées ou raccourcies sont généralement des courbes périodiques non fermées et transcendantes; mais si le rapport des rayons des circonférences fixe et mobile est un nombre commensurable, ces courbes deviennent algébriques et fermées.

Quelques cas particuliers sont célèbres.

Signalons tout d'abord deux cas remarquables du mouvement hypocycloïdal : ceux où le cercle intérieur roulant a un rayon égal à la moitié ou au tiers du rayon du cercle fixe.

Hypocycloïde à trois rebroussements.

Si le cercle roulant C_m a pour rayon le tiers du cercle fixe, un point de la circonférence du cercle C_m décrit une courbe algébrique célèbre du quatrième ordre et de la troisième classe, l'hypocycloïde à trois points de rebroussement. Les rebroussements se produisent, conformément à ce que nous savons, chaque fois que le centre instantané vient en coïncidence avec le point décrivant.

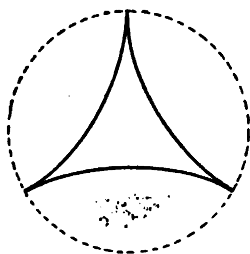


Fig. 53.

L'hypocycloïde à trois points de rebroussement possède de nombreuses propriétés métriques; en outre toute courbe du quatrième ordre à trois rebroussements est la perspective conique d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

Ellipsographe.

Lorsque le cercle intérieur roulant a un rayon moitié de celui du cercle fixe, un point quelconque de la circonférence du cercle roulant engendre un diamètre du cercle fixe. En effet, O étant le centre instantané, OM est la normale à la trajectoire du point M; donc MO_f est la tangente à cette trajectoire; elle passe par un point fixe O_f, ce qui prouve qu'elle se réduit à une droite MO_f issue de ce point. On pourrait encore faire observer que le point A où MO_f coupe le cercle fixe est fixe, en remarquant que les arcs OA et OM des cercles fixe et mobile sont égaux et que A est le point où vient le point M sur le cercle fixe quand il devient centre instantané.

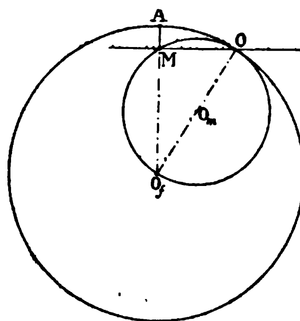


Fig. 54.

Deux points diamétralement opposés de la circonférence du cercle

mobile décrivent évidemment deux diamètres rectangulaires du cercle fixe.

Prenons actuellement un point P quelconque dans la figure mobile, joignons P au centre O_m du cercle mobile et soient M, M' les points où la droite $O_m P$ coupe le cercle mobile. Les points M, M' vont décrire deux droites rectangulaires, en sorte que nous sommes conduits au lieu suivant : *Un segment* MM' *glisse sur deux droites rectangulaires, trouver le lieu décrit par un point* P *pris sur ce segment ou sur son prolongement.*

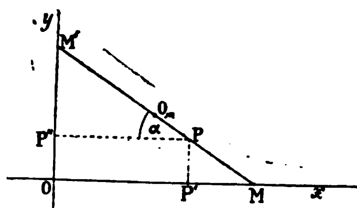


Fig. 55.

Ce lieu est une ellipse. Soit, en effet,

$$M'P = a, \quad PM = b, \quad \widehat{M'PP''} = \alpha.$$

Appelons x, y les coordonnées de P, on a (dans les triangles M'PP'' et MPP')

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha;$$

on reconnaît en même temps que α est l'angle excentrique du point P.

Il n'est pas nécessaire que Ox, Oy soient rectangulaires, car au lieu de mener par P un diamètre du cercle mobile on aurait pu mener une corde arbitraire, PMM' dont les extrémités MM' auraient décrit deux diamètres non rectangulaires du cercle fixe.

On a construit d'après ces remarques un appareil destiné à décrire l'ellipse et appelé *ellipsographe* ou compas elliptique.

Il est assurément très digne d'intérêt qu'une des trois sections coniques, l'ellipse, fasse partie de la famille des hypocycloïdes.

Conchoïde de cercle.

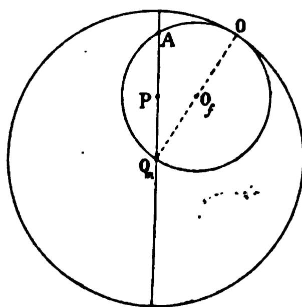


Fig. 56.

Considérons le mouvement inverse du précédent, c'est-à-dire faisons rouler un cercle sur un cercle intérieur fixe de rayon moitié. Tout diamètre AO_m du cercle mobile va couper le cercle fixe en un point fixe A, cela résulte du raisonnement inverse de celui qui a été fait plus haut. Le lieu

d'un point P sera donc une conchoïde du cercle fixe relative au point fixe A où PO_m coupe ce cercle.

Podaires de cercle.

Parmi les courbes remarquables auxquelles donne lieu le mouvement épicycloïdal on doit citer les podaires de cercles.

On obtient ces courbes en faisant rouler extérieurement sur un cercle C′ un cercle égal C; tout point lié au cercle C engendre une podaire de cercle.

Description générale des podaires.

58. Ce résultat peut être généralisé. Considérons, en effet, deux courbes C, C′ tangentes en un point et symétriques l'une de l'autre par rapport à la tangente en ce point.

Si l'on fait rouler sans glisser C sur C′, il est visible que, à chaque instant, la courbe C est la symétrique de la courbe C′ par rapport à la tangente Δ en leur point de contact; de là résulte que toute figure F entraînée par la courbe C est à tout instant la symétrique par rapport à la tangente Δ d'une figure fixe F′ liée à la courbe fixe C′.

En particulier, un point M lié à la courbe C sera à chaque instant symétrique par rapport à la tangente Δ à la courbe C′ d'un point fixe M′. Donc, les trajectoires des points liés à la courbe C sont les lieux des symétriques des divers points M′ du plan fixe par rapport aux tangentes de la courbe C′. Or, il est visible que ce lieu est la podaire par rapport au point M′ de la courbe C′ transformée homothétiquement dans le rapport 2, M′ étant le pôle d'homothétie.

Génération des caustiques.

Considérons une courbe Γ liée à la courbe C et entraînée par elle; la courbe Γ est la symétrique d'une courbe fixe Γ′, par rapport à la tangente Δ, à la courbe C′, au centre instantané O.

Abaissons de ce centre O la normale OM sur la courbe Γ; le pied M de cette normale est un point où la courbe Γ touche son enveloppe. Or, le cercle qui a pour centre le point O et qui passe en M sera tangent à Γ; il sera aussi tangent à la courbe Γ′ au point M′ symétrique de M par rapport à Δ. *L'enveloppe de la courbe Γ peut donc se définir comme branche de l'enveloppe des cercles dont le centre décrit la courbe C′ et qui sont tangents à la courbe Γ′.*

Si la courbe Γ se réduit à un cercle, son enveloppe est une développante de la caustique par réflexion sur la courbe C′ du centre du cercle qui constitue alors la courbe Γ′.

A l'occasion des systèmes articulés nous aurons à examiner un cas

particulier des mouvements précédents, celui du roulement d'une conique sur une conique symétrique.

Cas où l'on se donne les trajectoires de deux points.

59. Dans tous les exemples qui précèdent nous avons pris pour point de départ les courbes roulantes fixe et mobile. On peut varier à l'infini les données du mouvement.

Nous en donnerons quelques exemples.

Si l'on se donne les trajectoires (M), (N) de deux points M, N, les normales en M, N à ces courbes fournissent par leur rencontre le centre instantané de rotation O. On peut en déduire souvent une définition géométrique simple des courbes roulantes I_f, I_m. Mais il importe cependant d'avoir un procédé uniforme et régulier qui permette, dans tous les cas, de construire les éléments du second ordre. Pour cela, il suffit évidemment de connaître le point que nous avons appelé K'. Or, nous avons établi au sujet de ce point un théorème d'après lequel il a même puissance par rapport au cercle de centre M qui passe au point O, et par rapport au cercle décrit sur le rayon de courbure $M\mu$ de (M) comme diamètre. Le point K' est donc sur l'axe radical de ces cercles; il est aussi sur l'axe radical des cercles analogues relatifs au point N; le point K' se trouve ainsi déterminé. Alors OK' est la normale commune aux deux courbes roulantes, et de plus K' étant connu, on pourra appliquer la troisième construction de la formule de Savary pour trouver le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque de la figure.

Le lecteur appliquera sans peine cette construction au cas d'un segment MN glissant sur deux droites ou bien sur deux cercles.

Il peut arriver aussi que l'on se donne l'enveloppe d'une courbe et la trajectoire d'un point.

La normale à l'enveloppée, en son point de contact avec l'enveloppe, et la normale à la trajectoire du point se coupent au centre instantané qui est ainsi déterminé.

Quant au point K', le point mobile nous fournira une droite, axe radical de deux cercles, sur laquelle le point K' doit se trouver. En second lieu le centre de courbure de l'enveloppe étant le centre de courbure de la trajectoire du centre de courbure de l'enveloppée, on se trouvera ramené au cas où l'on se donnerait la trajectoire d'un second point de la figure.

De même si l'on se donnait les enveloppes de deux courbes de la figure. Les centres de courbure des deux enveloppes seraient les centres de courbure des trajectoires des centres de courbure des enveloppées; on serait donc ramené au cas où l'on se donne les trajectoires de deux points.

Exemples. — 1° *Étant donnés dans un plan fixe* P′ *un cercle fixe* C′ *de centre* O *et un point fixe A sur la circonférence de cercle, on considère un plan* P *glissant sur* P′, *de sorte qu'une droite* D *de ce plan passe constamment au point* A, *tandis qu'un point* M *de la droite* D *décrit le cercle* C′. *Trouver dans ce mouvement les deux courbes roulantes.* (Licence, Paris 1883.)

Le centre instantané est le point I diamétralement opposé au point M dans le cercle C′. En effet, MOI est la normale à la trajectoire du point M, AI est la normale à l'enveloppe de la droite MA (ou D) cette enveloppe étant considérée comme un cercle de rayon infiniment petit de centre A).

La courbe I_f est donc le cercle C′ lui-même.

Fig. 57.

Si l'on observe maintenant que, dans la figure mobile, le point I est à la distance constante MI = 2R (R rayon du cercle C′) du point M, on voit que la courbe I_m n'est autre que le cercle de rayon 2R qui a M pour centre.

Nous avons déjà vu plus haut que, dans ce mouvement, tout point du plan P décrit une conchoïde de cercle. On trouvera alors aisément, soit par application de la formule $\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{k}$, soit par application des constructions précédentes que K′ est le symétrique de M par rapport au point I.

Le centre des accélérations sera fourni par les formules

$$x + \frac{\omega'}{\omega^2} y = 0, \quad - y + \frac{\omega'}{\omega^2} x - k = 0.$$

Supposons par exemple que M décrive le cercle C′ d'un mouvement

uniforme. La vitesse de M est, puisque I est le centre instantané,

$$2R\omega;$$

si elle est constante, ω est constant, ω' est nul et les formules donnent

$$x = 0, \quad y = -k,$$

en sorte que le point K′ est justement le centre des accélérations.

2° *Un segment de droite* AB *de longueur invariable se meut en restant tangent à un cercle fixe* C *tandis que son extrémité* A *décrit une tangente fixe* T *de ce cercle. Trouver les courbes roulantes, etc.* (Besançon, 1884.)

Soit M le point où AB touche le cercle, le centre instantané I est sur la normale OM; il est aussi sur la normale AI en A à la droite T

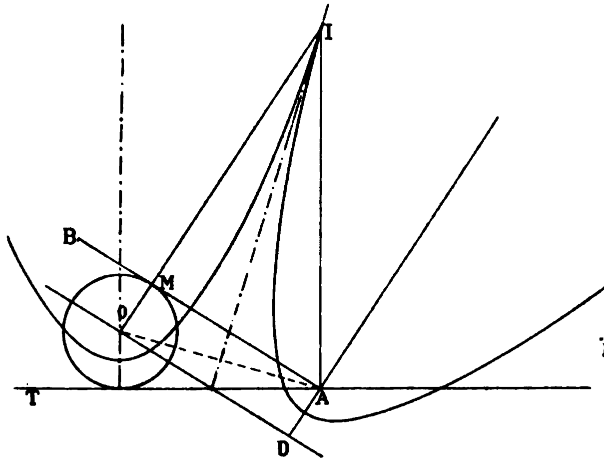


Fig. 58.

que décrit le point A. Cela posé, on remarque que le triangle OIA est isocèle; en effet,

$$\text{angle IAO} = \frac{\pi}{2} - \text{angle OAT}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{angle OAM}.$$

Or, l'angle MOA a évidemment cette même valeur. Donc $IO = IA$.

Dans le plan fixe le lieu de I est donc une parabole dont O est le foyer et T la directrice.

Menons par O la droite OD parallèle à AB et regardons OD comme une droite liée invariablement à la figure mobile, la relation $IO = IA$ prouve que le lieu du point I dans la figure mobile est une parabole dont A est le foyer et OD la directrice; ces paraboles sont égales, car la distance de A à OD est égale à la distance de O à T. Quand AB vient s'appliquer sur la tangente T, les deux paraboles sont tangentes en leurs sommets, nous avons donc un mouvement dans lequel une parabole roule sans glisser sur une parabole égale en lui restant symétrique par rapport à la tangente commune.

Tous les points de la figure décrivent alors des podaires de parabole.

La droite T, lieu du point A, est, en particulier, la podaire du foyer, c'est-à-dire la tangente au sommet d'une parabole de paramètre double de celui des paraboles roulantes.

Le point K' est ici très facile à construire. Quand deux courbes symétriques roulent l'une sur l'autre, on a

$$R_m = - R_f,$$

et par suite

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{2}{R_f},$$

d'où $k = \frac{1}{2} R_f$. Donc K est le milieu du rayon de courbure de I_f et K' le milieu du rayon de courbure de I_m.

Or, dans la parabole, le milieu du rayon de courbure est le symétrique, par rapport au point de la courbe, du point où la normale coupe la directrice. Il en résulte ici que K' est le point de rencontre de la droite T avec la normale en I aux roulettes, c'est-à-dire avec la parallèle menée par le point I à la droite OA.

60. Dans d'autres cas, au lieu de se donner les roulettes et les trajectoires ou enveloppes de points ou courbes de la figure, on peut se donner des conditions conduisant à des équations différentielles.

Tel est le problème suivant :

3° *Quelle courbe faut-il faire rouler sur une droite pour qu'un point M de la figure décrive une circonférence de cercle?* (Paris, 1893.)

Soient C le centre du cercle et A, B les points où le cercle est coupé

par la droite donnée. Abaissons de C la perpendiculaire sur AB; appelons D son pied et soit E l'extrémité du rayon CD. Quand le point mobile vient de la position E à la position M, qu'il occupe à un instant donné, le segment ED, supposé entraîné dans le mouvement, vient occuper une position MN, et la droite MN coupe le rayon CE en un point H. L'angle MHE est l'angle dont a tourné le segment ED pour venir en MN.

Appelons I le point où, lorsque le point mobile est en M, la roulette mobile touche la droite fixe AB; le point I est le point de rencontre de AB avec la normale CM à la trajectoire du point M. Rapportons la roulette mobile à des coordonnées polaires dont les éléments de référence seront, naturellement, liés à la figure mobile; ainsi MN sera l'axe polaire et M le pôle des coordonnées; $MI = r$ sera le rayon vecteur, et $\theta = NMI$ sera l'angle polaire. L'angle AIC est celui de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur, donc

$$\tang \widehat{AIC} = \frac{r\,d\theta}{dr} = -\tang CID = -\cotg \widehat{ICD}.$$

Or, en appelant b la distance CD et a la distance CM, on a

$$IC = a - r,$$

d'où

$$b = CD = IC \,.\, \cos \widehat{ICD} = (a - r) \cos \widehat{ICD}.$$

On en tire

$$\cotg \widehat{ICD} = \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2 - b^2}},$$

d'où, enfin,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2 - b^2}},$$

quadrature facile à effectuer.

Si $b < a$, c'est-à-dire si la droite coupe le cercle, r devient nul quand M vient en A ou en B; mais θ devient alors infini. On constate que la courbe roulante se compose de deux branches symétriques par rapport à la droite MN et asymptotes au point M. Quand l'une des branches se déroule sur DA, le point M décrit l'arc EA du cercle; mais M ne peut arriver en A qu'après une infinité de révolutions de la courbe roulante. La branche symétrique, en se déroulant sur DB, permet de décrire dans les mêmes conditions l'arc EB du cercle.

On discutera sans peine le cas où l'arc de cercle décrit est plus grand qu'une demi-circonférence et celui où la droite ne coupe pas le cercle.

Le centre instantané s'éloigne à l'infini quand le point M vient aux extrémités du diamètre parallèle à la droite donnée.

4° *Deux courbes* C, C' *sont symétriques par rapport à une droite* Δ *perpendiculaire à une de leurs tangentes communes,* T. *On fait rouler sans glisser* C *et* C' *sur la droite* T, *de sorte qu'elles demeurent symétriques par rapport à* Δ. *On demande de trouver les courbes roulantes dans le mouvement relatif de* C *par rapport à* C'. (Paris, 1893.)

Le mouvement de C par rapport à C' résulte du mouvement de C par rapport à la droite T et du roulement sans glissement de T sur C'. Ce dernier mouvement constitue le mouvement inverse du mouvement de C' par rapport à T. La vitesse d'un point P entraîné par la courbe C sera donc la différence géométrique entre sa vitesse dans le roulement de C sur T et la vitesse qu'il aurait dans le roulement de C' sur T, s'il était lié à C'.

Le centre instantané cherché doit avoir une vitesse nulle dans le mouvement de C par rapport à C'; donc il doit avoir la même vitesse dans le roulement de C sur T et de C' sur T. On en peut conclure qu'il est à chaque instant au point de rencontre de l'axe de symétrie Δ avec la tangente T. Les courbes roulantes sont donc deux développantes des courbes C, C', développantes qui sont tangentes au point I à la droite Δ et toujours symétriques par rapport à cette tangente commune. Nous reproduisons donc un mouvement qui nous est bien connu. Les points où C', C touchent la droite T sont justement les centres de courbure des roulantes I_f et I_m.

5° Traitons encore le problème suivant :

Une droite OD *tourne dans un plan et avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un de ses points* O *supposé fixe. Un cercle* C *roule en même temps sans glisser sur la droite* OD *avec une vitesse angulaire constante* ω_1. *Ce cercle entraîne une figure plane qui glisse sur le plan fixe. On demande de trouver les deux courbes fixe et mobile, qui roulent l'une sur l'autre sans glisser.* (Paris, 1894.)

Appelons P le point où le cercle C touche la droite OD à l'époque t, et supposons qu'à l'époque initiale le point P soit au point O, ce qui

revient à choisir l'origine du temps; désignons par a le rayon du cercle. La vitesse du point P sur le cercle est égale à $a\omega_1$; cette vitesse est aussi celle du point P sur la droite OD, car elle représente la vitesse propre au centre instantané P dans le mouvement relatif du cercle sur la droite OD; nous aurons donc

$$OP = a\omega_1 t.$$

Le centre instantané qui correspond au mouvement absolu de la figure plane doit être tel que sa vitesse d'entraînement dans le mouvement de la droite OD et sa vitesse relative dans le roulement du cercle C sur OD soient égales et opposées. Donc le point I doit être d'abord sur la droite OP, qui joint les deux centres de rotation. Si ω et ω_1 sont de mêmes signes, il faudra prendre I sur le segment OP, de sorte que

$$OI.\omega = IP.\omega_1,$$

ce qui donnera

$$OI = \frac{\omega_1}{\omega + \omega_1} \cdot OP = \frac{a\omega_1^2}{\omega + \omega_1} t.$$

Soit θ l'angle que fait OD avec sa position initiale, on a

$$\theta = \omega t,$$

donc

$$OI = \frac{a\,\omega_1^2}{\omega(\omega + \omega_1)}\,\theta,$$

ce qui est l'équation en coordonnées polaires de la courbe fixe lieu du centre instantané; ce lieu est une spirale d'Archimède.

Soit, sur le cercle C, A le point qui est en contact avec le point O à l'instant initial. Je prends pour axes liés à la figure mobile O_1A qui joint au point A le centre O_1 du cercle mobile et un axe O_1y_1 perpendiculaire. L'angle AO_1P est égal à $\theta_1 = \omega_1 t$, et le segment PI, tangent au cercle en P, a pour longueur

$$PI = \frac{\omega}{\omega_1} OI = \frac{a\,\omega\omega_1}{\omega + \omega_1} t = \frac{a\,\omega}{\omega + \omega_1} \theta_1.$$

Les coordonnées du point I sont donc

$$x_1 = a\cos\theta_1 + \frac{a\omega}{\omega + \omega_1}\theta_1 \sin\theta_1,$$

$$y_1 = a\sin\theta_1 - \frac{a\omega}{\omega + \omega_1}\theta_1 \cos\theta_1.$$

Ces équations définissent la courbe lieu du centre instantané dans la figure mobile.

Si les rotations étaient de sens contraire, le point I, au lieu d'être entre P et O, serait hors du segment OP. Les résultats précédents subsisteraient avec une modification insignifiante. Il n'y aurait d'exception que si ω et ω_1 étaient égales et de signes contraires. Pour avoir la vitesse absolue d'un point de la figure nous aurons alors à composer deux rotations formant un couple. Tous les points de la figure ont à chaque instant même vitesse et le mouvement consiste en une translation continue. Il est du reste aisé de voir que la vitesse de tout point de la figure est dans ce cas perpendiculaire à la droite OD et égale au produit $OP \times \omega$. Il suffit, pour s'en rendre compte, de chercher la vitesse d'entraînement du point P. Tous les points de la figure décrivant des courbes égales, il suffit de chercher la trajectoire du centre O_1 du cercle C pour les avoir toutes.

Désignons par V l'angle OO_1P, par r la distance OO_1 par l'angle de OO_1 avec une droite fixe, par exemple avec la position initiale de OD. On a

$$\varphi = \omega t + \widehat{O_1OP} = \omega t + \frac{\pi}{2} - V;$$

d'un autre côté le triangle O_1OP donne

$$a = r \cos V.$$

Observons maintenant que O_1P est la tangente à la trajectoire du point O_1; on a donc

$$\text{tang } V = \frac{r\,d\varphi}{dr},$$

c'est-à-dire

$$\text{tang } V = \frac{r(\omega\, dt - dV)}{\dfrac{a \sin V}{\cos^2 V}\, dV} = \frac{\omega\, dt - dV}{\text{tg } V . dV},$$

ou encore

$$\omega\, dt = \frac{dV}{\cos^2 V},$$

et, par intégration,

$$\omega\, t = \text{tang } V$$

sans constante additive, car t et V sont nuls en même temps.

On a donc

$$r = \frac{a}{\cos V}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \text{tang } V - V,$$

équations qui définissent la trajectoire du point O_1.

Propriétés des aires.

61. Soient A un point fixe et M un point d'une figure plane mobile dans son plan, le rayon vecteur AM engendre une aire que nous nous proposons d'évaluer.

Soient x_1, y_1 les coordonnées relatives du point A; l'élément de l'aire engendrée est le produit de dt par la moitié du moment de la vitesse du point M (x, y) par rapport au point A, à savoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{(x - x_1)\, v_y - (y - y_1)\, v_x\right\} dt \\ = \left\{(\omega x + \eta)(x - x_1) + (\omega y - \xi)(y - y_1)\right\} \frac{dt}{2} = d\mathcal{A}\end{aligned}$$

en désignant par $\mathcal{A}$ l'aire cherchée.

En développant on trouve

$$2\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \omega(x^2 + y^2) + (\eta - \omega x_1)\, x - (\xi + \omega y_1)\, y + \xi y_1 - \eta x_1.$$

Désignons par θ l'angle dont tourne la figure, on a

$$\theta = \int \omega\, dt;$$

posons en outre

$$\begin{aligned} 2a\theta &= -\int(\eta - \omega x_1)\, dt, \\ 2b\theta &= \int(\xi + \omega y_1)\, dt, \\ c\theta &= \int(\xi y_1 - \eta x_1)\, dt, \end{aligned}$$

nous obtenons l'expression suivante de l'aire $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{2}\left[x^2 + y^2 - 2\,ax - 2by + c\right].$$

Donc, le point A fixe étant donné, *l'aire balayée par le rayon*

vecteur AM *est égale au produit de la moitié de l'angle dont tourne la figure par la puissance du point* M *par rapport à un certain cercle.*

Le lieu des points dont le rayon vecteur engendre une aire donnée pour une amplitude déterminée du déplacement de la figure est, dès lors, un cercle concentrique au cercle précédent.

Désignons par C le centre de ce cercle, par M un point et par Γ_M le cercle de centre C qui passe par M. Les aires correspondantes à chaque point de ce cercle Γ_M sont équivalentes; si l'on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire correspondante au point M, l'équation du cercle Γ_M sera

$$\frac{\theta}{2}(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) - \mathcal{A} = 0.$$

Prenons un second point M' de coordonnées x', y', l'aire qui lui correspond a pour expression

$$\mathcal{A}' = \frac{\theta}{2}(x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c),$$

ce que l'on peut écrire

$$\mathcal{A}' - \mathcal{A} = \frac{\theta}{2}(x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c) - \mathcal{A}.$$

De là ce théorème :

La différence des aires balayées par les rayons vecteurs de deux points M, M' *de la figure est égale au produit de la moitié de l'angle de rotation par la puissance du point* M' *par rapport au cercle* Γ_M, *lieu des points qui donnent des aires équivalentes à celle qu'engendre le rayon vecteur du point* M.

Théorème de Holditch.

Le curieux théorème de Holditch résulte immédiatement de cette proposition.

Considérons une tige MN qui glisse par ses extrémités dans une courbe C fermée convexe; un point M' de cette tige décrit une courbe intérieure fermée comme la première. Après un tour complet les points M, N ont décrit la même courbe. Le cercle Γ_M, lieu des points, qui donnent des courbes d'aires équivalentes à l'aire de C passe aussi par le point N. La différence entre l'aire de la courbe décrite par M et celle décrite par M' est égale, d'après le théorème

précédent, à la puissance de M′ par rapport à Γ_M, multipliée par $\frac{2\pi}{2} = \pi$, puisque 2π est l'angle de rotation. Cette différence est donc égale à

$$\pi a b$$

où a, b sont les segments M′M, M′N.

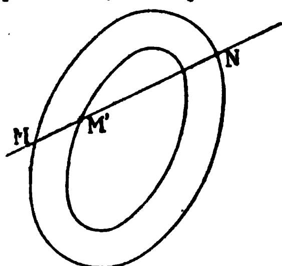


Fig. 59.

Or, la différence de ces deux aires est évidemment l'aire de la bande comprise entre la courbe C et celle que décrit le point M′. *L'aire $\pi a b$ de cette bande est indépendante de la forme de la courbe* C. En cela consiste le théorème de Holditch.

Aire balayée par un segment.

62. Soient $\overline{AB}$ un segment de droite, $\overline{A'B'}$ le même segment dans une position voisine, O le centre instantané. L'aire élémentaire balayée par $\overline{AB}$ est celle du quadrilatère AA′B′B. Cette aire est égale à la somme des surfaces des deux triangles A′B′O, B′OB, moins celle des triangles ABO, A′OA,

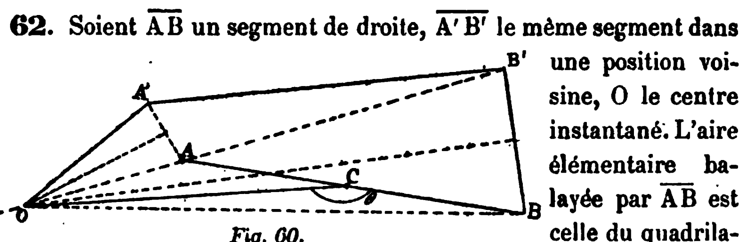


Fig. 60.

$$AA'B'B = A'B'O + B'OB - ABO - A'OA.$$

Or, les triangles ABO, A′B′O sont égaux, comme on sait; il reste donc

$$AA'B'B = A'OA - B'OB.$$

Appelons r, r' les distances OA, OB, on a

$$A'OA = \frac{1}{2} r^2 \omega\, dt, \quad B'OB = \frac{1}{2} r'^2 \omega\, dt,$$

d'où résulte

$$d\mathcal{A} = AA'B'B = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2)\,\omega\, dt.$$

Soient C le milieu de AB, θ l'angle OCB et ρ la distance OC; désignons aussi par a les distances égales CA, CB, on a

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + \rho^2 + 2a\rho\cos\theta, \\ r'^2 &= a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$r^2 - r'^2 = 4a\rho \cos\theta,$$

et par suite,

$$d\mathcal{A} = 2a\rho\omega \cos\theta\, dt;$$

$\omega\rho \cos\theta$ est la projection de la vitesse du point C sur la perpendiculaire à la tige. Supposons qu'une roulette ayant AB pour axe enregistre le déplacement du point C compté normalement à AB.

Soit $d\sigma$ le déplacement élémentaire ainsi évalué, on aura

$$d\sigma = \omega\rho \cos\theta . dt,$$

et par suite

$$d\mathcal{A} = 2a\, d\sigma,$$

d'où

$$\mathcal{A} = 2a\sigma.$$

Planimètres polaires.

Si un compteur permet d'évaluer la marche effectuée par la roulette, on aura là un instrument permettant d'évaluer les aires. C'est le principe des *planimètres polaires*.

On fait décrire à l'un des points B un arc de cercle au moyen d'une bride; le point A décrit le contour dont on veut évaluer l'aire. On s'arrange de sorte qu'après un tour complet le point B ait décrit deux fois, mais en sens inverse, l'arc de cercle qu'il décrit; l'aire balayée par le segment AB se compose d'une partie positive et d'une partie négative dont la différence, donnée par la lecture de l'appareil, fournit l'aire du contour proposé.

Aire balayée par un segment variable.

63. On peut étendre l'ordre d'idées précédent en envisageant un segment variable $\overline{AB}$; soit $\overline{A'B'}$ une position voisine; la surface du quadrilatère ABB'A' représente encore la différentielle $d\mathcal{A}$ de l'aire balayée par le segment $\overline{AB}$, on a $d\mathcal{A}$ = triangle ABB' + triangle B'A'A ou

$$2d\mathcal{A} = \text{moment par rapport à A de } \overline{BB'} + \text{moment par rapport à B' de } \overline{A'A}.$$

En désignant par $\overline{v_A}$, $\overline{v_B}$ les vitesses de A, B, on a

$$\overline{AA'} = \overline{v_A} . dt, \quad \overline{BB'} = \overline{v_B} . dt.$$

On peut écrire en tenant compte du signe des moments et en

observant que la différence entre moment$_{B'}$ $\overline{A'A}$ et moment$_B$ $\overline{A'A}$ est un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$2\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \text{moment}_A\,\overline{v_B} - \text{moment}_B\,.\,\overline{v_A}.$$

Autrement dit, *le double de la dérivée, prise par rapport au temps, de l'aire balayée par un segment variable* $\overline{AB}$, *est égal à la différence des moments des vitesses de chaque extrémité pris par rapport à l'autre extrémité.*

Appliquons au cas où le segment mobile est celui qui joint le centre instantané I à un point M lié invariablement à la figure mobile.

Nous aurons

$$2\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \text{moment}_M\,.\,\overline{v_I} - \text{moment}_I\,\overline{v_M};$$

or, si p est la distance de M à la tangente commune aux deux roulettes et V la vitesse propre au centre instantané, on a

$$\text{moment}_M\,\overline{v_I} = p\,.\,V.$$

On observera que la quantité p, avec les notations du n° 49, aurait pour valeur $p = r\sin\theta$; la distance IM étant encore désignée par r.

La vitesse de M est ωr, elle est normale à IM, son moment par rapport à I est donc ωr^2, et l'on trouve ainsi

$$2\frac{d\mathcal{A}}{dt} = pV - \omega r^2.$$

Désignons par s l'arc de la roulette I_m, qui, du reste, est aussi égal à celui de la roulette I_f, on a $V = \frac{ds}{dt}$, tandis que

$$\omega = V\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{ds}{dt},$$

il vient alors

$$2\,d\mathcal{A} = p\,ds - \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) r^2 ds.$$

Théorème de Steiner. Nous allons tirer de cette formule le théorème de Steiner relatif aux aires des roulettes.

Supposons que la roulette fixe se réduise à une droite, $\frac{1}{R_f}$ sera nul et l'aire balayée par IM dans un tour complet (en supposant que I_m soit une courbe fermée convexe) sera

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left[\int p\,ds + \int \frac{1}{R_m} r^2 ds\right].$$

Dans $\int p\,ds$ on reconnait le double de l'aire $\mathcal{A}_0$ de la courbe I_m; nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}\int \frac{r^2}{R_m}\,ds.$$

Faisons maintenant rouler la courbe I_m sur sa symétrique par rapport à une de ses tangentes, nous devons prendre alors $R_f = - R_m$ et la formule générale nous donnera pour l'aire balayée par le rayon IM dans ce nouveau mouvement,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_m}\right) r^2 ds \\ &= \mathcal{A}_0 + \int \frac{r^2}{R_m}\,ds.\end{aligned}$$

Dans ce second mouvement le point M décrit une courbe fermée C, dont l'aire totale se compose de l'aire de la courbe I_f, symétrique de I_m, augmentée de l'aire balayée par le segment IM, donc l'aire (C) de la courbe C a pour valeur

$$(C) = \mathcal{A}' + \mathcal{A}_0 = 2\,\mathcal{A}_0 + \int \frac{r^2 ds}{R_m},$$

c'est-à-dire

$$(C) = 2\mathcal{A}.$$

Observons maintenant que si l'on désigne par Π la podaire de la courbe I_f par rapport au point M' symétrique du point M, la courbe C n'est autre que la courbe Π amplifiée dans le rapport de 2 à 1, si donc (Π) représente l'aire de cette podaire, on a

$$(\Pi) = \frac{1}{4}(C),$$

d'où résulte

$$2\,(\Pi) = \frac{1}{2}(C) = \mathcal{A}.$$

Si l'on remarque que Π est la symétrique de la podaire de I_m par rapport au point M, on peut énoncer ce théorème :

Si une courbe fermée I_m *roule sur une de ses tangentes, l'aire* $\mathcal{A}$ *balayée par le vecteur qui joint le centre instantané de rotation à un point lié à* I_m *est égale pour une révolution complète au double de l'aire de la podaire de la courbe* I_m *par rapport au point* M.

Autre théorème général.

La méthode que nous avons suivie conduit à un théorème de géométrie générale [1].

Considérons trois arcs de courbes finis ayant la même longueur, AB, A'B', A''B''; prenons sur eux les points M, M', M'' tels que les arcs AM, A'M', A''M'' aient une même valeur s, soient $\frac{1}{R_f}$, $\frac{1}{R'_f}$, $\frac{1}{R''_f}$ les courbures en M, M', M'' de ces trois arcs; nous supposerons qu'on ait constamment

$$\frac{2}{R''_f} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R'_f}.$$

Dans ces conditions : *Si l'on fait rouler un arc quelconque* CD *ayant même longueur que* AB, A'B', A''B'', *successivement sur* AB, A'B' *et* A''B'', *les aires balayées par les segments qui joignent le centre instantané à un point* M *lié à l'arc* CD *étant désignées par* $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, *on aura*

$$2\mathcal{A}'' = \mathcal{A} + \mathcal{A}'.$$

On a, en effet, d'après la formule générale,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{A} &= \int p\, ds + \int \frac{r^2\, ds}{R_m} - \int \frac{r^2\, ds}{R_f},\\
2\mathcal{A}' &= \int p\, ds + \int \frac{r^2\, ds}{R_m} - \int \frac{r^2\, ds}{R'_f},\\
2\mathcal{A}'' &= \int p\, ds + \int \frac{r^2\, ds}{R_m} - \int \frac{r^2\, ds}{R''_f},
\end{aligned}$$

d'où

$$4\mathcal{A}'' - 2\mathcal{A} - 2\mathcal{A}' = -\int r^2 \left(\frac{2}{R''_f} - \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R'_f}\right) ds = 0.$$

Il faut observer que dans ces formules R_f, R'_f, R''_f ont des signes

[1] *Comptes rendus*. Séance du 7 mai 1894.

dépendant de la disposition de la concavité des courbes I_f, I'_f, R'_f (ou AB, A′B′, A″B″) par rapport à la courbe mobile I_m (ou CD).

Supposons, par exemple, que l'on prenne pour AB et A′B′ la même courbe, mais où les rayons de courbure seraient changés de signe.

Cela veut dire que dans un cas CD roule d'un côté de l'arc AB et, dans l'autre cas, de l'autre côté.

Examinons ce que devient notre théorème dans ce cas, on a

$$R'_f = -R_f$$

donc $\frac{1}{R''_f} = 0$, ce qui veut dire que l'arc A″B″ se réduit à un segment de tangente. On a donc ce théorème curieux :

Soient un arc quelconque *CD* ***et*** *M* ***un*** *point qui lui est invariablement lié, on fait rouler CD sur un arc égal quelconque AB et successivement de part et d'autre de cet arc; la somme des aires balayées par le vecteur qui joint M au centre instantané est indépendante de l'arc AB choisi et a pour valeur particulière celle que l'on obtient, par exemple, en prenant pour AB un segment de tangente.*

Propriétés des arcs.

Théorème de Steiner relatif aux arcs.

64. Steiner a donné un autre théorème relatif aux arcs des trajectoires dans l'hypothèse d'une courbe I_m roulant sur l'une de ses tangentes.

Soient AB un arc fini de I_m, AA′, BB′ les tangentes à I_m en A et B menées dans le sens AB des arcs croissants, et soit enfin Δ la tangente sur laquelle roule l'arc AB; désignons par θ l'angle variable de AA′ avec l'axe choisi sur Δ dans le sens du mouvement du centre instantané. Au début θ est égal à zéro, quand AA′ coïncide avec Δ; il devient ensuite égal à l'angle θ_0 de AA′ avec BB′, quand BB′ vient s'appliquer sur Δ. Soient I le point de contact de I_f avec Δ, M un point lié à I_f et P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ. L'arc élémentaire décrit par M est égal à $r.d\theta$, en posant $r = IM$, donc l'arc fini décrit par M a pour valeur

$$\int_0^{\theta_0} r\,d\theta.$$

Considérons maintenant la même courbe I_m, le même point M et assujettissons l'angle droit MPI à avoir un côté tangent à I_m tandis que l'autre ira passer en M. Le côté PI de l'angle droit, d'abord appliqué sur la tangente AA′ à I_f, viendra s'appliquer sur BB′ et tournera de l'angle θ_0; le centre instantané est, du reste, le point N quatrième sommet du rectangle MPIN et comme $NP = MI = r$, l'arc élémentaire décrit par P sera

$$NP.d\theta = r.d\theta,$$

où θ est l'angle de PI avec AA′; on aura donc pour l'arc fini décrit par le point P

$$\int_0^{\theta_0} r\,d\theta,$$

c'est-à-dire la longueur déjà trouvée.

L'arc de podaire lieu du point P *est donc égal à l'arc correspondant de trajectoire décrit par le point* M.

CHAPITRE VIII

Mouvement autour d'un point fixe.

Mouvement sur une sphère.

65. Lorsqu'une figure de forme invariable a un point fixe O, toute sphère qui a ce point comme centre glisse sur elle-même au cours du mouvement; nous pourrons donc procéder comme dans le cas d'une figure dont un plan glisse sur lui-même et ramener la question au glissement d'une sphère sur elle-même.

C'est ainsi qu'il conviendra de procéder notamment dans la plupart des raisonnements géométriques, mais quand on emploie les formules il peut être avantageux de considérer la figure dans l'espace.

Prenons comme origine du trièdre mobile le point fixe O; les quantités ξ, η, ζ qui représentent les projections de la vitesse d'entraînement de O étant nulles, la vitesse sera donnée par les formules

$$v_{e,x} = qz - ry, \quad v_{e,y} = rx - pz \quad v_{e,z} = py - qx.$$

On reconnaît aussitôt l'existence d'une rotation tangente dont l'axe Δ est issu du point O et qui est représentée par le segment $\overline{O\Omega}$ dont p, q, r sont les projections sur les axes mobiles.

Soient I, I' les points où Δ perce une sphère S de centre O et considérons le mouvement de glissement de la sphère S sur elle-même; dans le temps dt tous les points de la sphère décriront des arcs de petits cercles dont I, I' seront les pôles. Les grands cercles normaux se couperont donc tous suivant le diamètre II'. De là ce théorème :

Théorème I. — *Dans le mouvement d'une figure sphérique sur sa propre sphère, les grands cercles menés à un même instant par*

les différents points de la figure normalement à leurs trajectoires, se coupent en deux points I, I'.

On peut ajouter que si θ est l'angle correspondant à l'arc de grand cercle compris entre le point I et le point mobile M, la vitesse du point est

$$R . \sin \theta . \omega,$$

où R est le rayon de la sphère et ω la vitesse angulaire.

Enveloppe d'une courbe mobile sur une sphère.

Le problème des enveloppes se traite par un procédé analogue à celui qu'on a employé pour la question correspondante concernant les figures planes.

Soient une courbe C tracée sur la sphère S et (C) son enveloppe qu'elle touche au point P. La vitesse absolue de P est tangente à la courbe (C), sa vitesse relative à la courbe enveloppée C, ces deux courbes étant tangentes les deux vitesses se trouvent portées par une même droite; la vitesse d'entraînement, qui est leur différence géométrique, est donc portée par cette droite. La vitesse d'entraînement du point P est ainsi portée par la tangente à la courbe C. On démontre facilement la réciproque en s'appuyant sur ce que la vitesse d'entraînement est normale au grand cercle mené par PII'. On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME II. — *Pour avoir les points où une courbe* C *tracée sur la sphère* S *touche son enveloppe, il faut prendre sur cette courbe les points dont les grands cercles normaux vont passer par* I, I'.

Glissement.

Désignons par s l'arc de la courbe C compté à partir d'un point A; par s' l'arc de la courbe (C) compté à partir du point A' avec lequel A vient en contact à une certaine époque; $\frac{ds'}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ sont les vitesses absolue et relative du point P, leur différence est égale à la vitesse d'entraînement $R\omega \sin \theta$, où θ est l'angle au centre de l'arc de grand cercle IP; on a donc

$$\frac{ds'}{dt} - \frac{ds}{dt} = R\omega \sin \theta.$$

La différence $s' - s$ représente le *glissement* de la courbe C sur son enveloppe (C). Il ne peut être constamment nul que si $\sin \theta$ est

nul, c'est-à-dire si le point P est précisément sur l'axe instantané en l'un des points I ou I'.

Courbes I_m et I_f.

66. Nous sommes ainsi amenés à considérer le lieu du point I et celui de son symétrique I' sur la sphère. Il suffira de considérer le lieu de I. Appelons I_m, I_f les courbes décrites par le point I sur la sphère mobile et sur la sphère fixe. Ces courbes ont à chaque instant en commun le point I, lequel est mobile à la fois sur I_f et sur I_m; I_f est sa trajectoire absolue, I_m sa trajectoire relative. *La vitesse absolue de* I *et sa vitesse relative sont d'ailleurs égales*, car leur différence géométrique, qui est la vitesse d'entraînement de I, est nulle. On peut en conclure les propriétés suivantes :

Les courbes I_f *et* I_m *sont tangentes l'une à l'autre au point* I.

En effet, la vitesse absolue et la vitesse relative sont égales et portées par la même droite; cette droite doit donc toucher au point I la courbe I_f et la courbe I_m.

La courbe I_f est ainsi une branche de l'enveloppe de I_m.

J'ajoute *que* I_m *roule sans glisser sur* I_f.

En effet, le glissement est ici nul puisque $\sin\theta$ est constamment nul. La démonstration prouve en même temps que la courbe I_m et sa symétrique sont les seules qui roulent sans glisser sur une branche de leur enveloppe.

Nous avons ainsi ce théorème :

THÉORÈME III. — *Quand une figure sphérique glisse sur sa propre sphère, il y a deux courbes sphériques, l'une mobile, l'autre fixe,* I_m, I_f *qui roulent l'une sur l'autre sans glisser et à l'exception des symétriques de ces courbes par rapport au centre de la sphère; il n'y a pas d'autre courbe qui roule sans glisser sur une branche de son enveloppe.*

Cônes roulants dans le mouvement autour d'un point fixe.

La propriété correspondante de la figure mobile dans l'espace autour du point fixe O est la suivante :

Les cônes Γ_f, Γ_m, qui ont pour sommet le point O et pour bases les courbes I_f, I_m, roulent l'un sur l'autre *sans glisser*, en traduisant par cette locution le fait que les bases sphériques I_f et I_m roulent l'une sur l'autre sans glisser. Donc :

THÉORÈME IV. — *Quand une figure tourne autour d'un point*

fixe O, il existe un cône Γ_m lié à la figure qui roule sans glisser sur un cône fixe Γ_f. La génératrice de contact est justement l'axe de la rotation instantanée.

Accélération angulaire.

67. On ne manquera pas d'observer que si un point M se meut sur l'axe instantané de rotation, sa vitesse absolue et sa vitesse relative sont constamment égales, attendu que la vitesse d'entraînement est nulle.

Considérons, par exemple, le segment $\overline{O\Omega}$ qui représente la rotation; les coordonnées de Ω sont p, q, r; la vitesse absolue et la vitesse relative du point Ω sont égales et leurs projections sur les axes mobiles sont

$$p' = \frac{dp}{dt}, \quad q' = \frac{dq}{dt}, \quad r' = \frac{dr}{dt},$$

le segment $\overline{O\Omega_1}$, qui représente cette vitesse, a reçu le nom d'*accélération angulaire*.

Rappelons ici qu'au numéro 41, page 127, nous avons prouvé que si l'axe du mouvement hélicoïdal a une direction fixe dans le corps, il a une direction fixe dans l'espace.

Dans le cas actuel, cela signifie que si le segment $\overline{O\Omega}$ a une direction constante dans le corps, il a aussi une direction constante dans l'espace.

On peut, d'ailleurs, le constater directement.

Si, en effet, $\overline{O\Omega}$ a une direction constante dans le corps, le segment $\overline{\Omega\Omega_2}$ équipollent à $\overline{O\Omega_1}$ passe par le point O, car il représente la vitesse relative de Ω qui ne fait que glisser sur $O\Omega$.

Or, $\overline{\Omega\Omega_2}$ représente aussi la vitesse absolue de Ω; donc, puisqu'il passe toujours au point fixe O, le lieu de Ω dans l'espace ne peut être qu'une droite *fixe* issue de O.

De l'accélération dans le mouvement autour d'un point fixe.

Théorème de Rivals.

68. Cherchons quelles simplifications résultent pour les formules donnant l'accélération de l'hypothèse d'un point fixe. Les quantités ξ, η, ζ étant nulles, les quantités ξ_1, η_1, ζ_1 le seront aussi, et nous

obtiendrons pour l'accélération d'entraînement

$$J_{e,x} = q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x},$$
$$J_{e,y} = r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y},$$
$$J_{e,z} = p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial z},$$

où l'on a posé, comme précédemment,

$$2H = (px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Le système de segments p', q', r', ξ_1, η_1, ζ_1 considéré au numéro 45, page 133, se réduit alors au seul segment $\overline{O\Omega_1}$ qui représente l'accélération angulaire et les formules précédentes expriment le théorème attribué à Rivals et d'après lequel *l'accélération d'entraînement dans le mouvement autour d'un point fixe est la somme géométrique de deux segments; le premier représente la vitesse qu'aurait le point mobile si on lui imprimait une rotation représentée par l'accélération angulaire* $\overline{O\Omega_1}$; *le second représente l'accélération centripète qui naîtrait d'une rotation uniforme continue, représentée par le même segment* $\overline{O\Omega}$ *que la rotation instantanée.*

Choix particulier des axes.

Suivant une méthode qui nous a déjà réussi, nous pourrons choisir les axes de coordonnées de façon à simplifier les formules. Nous supposerons qu'à l'instant considéré Oz soit l'axe instantané et zOx le plan tangent commun aux cônes Γ_m, Γ_f; alors p, q seront nuls, r se réduira à ω; de plus $\overline{O\Omega_1}$ étant dans le plan zOx, q' sera nul. Il viendra donc

$$J_{e,x} = -r'y - \omega^2 x,$$
$$J_{e,y} = r'x - p'z - \omega^2 y,$$
$$J_{e,z} = p'y,$$

tandis que les formules relatives à la vitesse d'entraînement se réduiront à

$$v_{e,x} = -\omega.y,$$
$$v_{e,y} = \omega.x,$$
$$v_{e,z} = 0.$$

Le plan osculateur à la trajectoire d'un point contient la vitesse et l'accélération. On trouvera donc aisément ce plan qui a pour équa-

tion, x, y, z étant les coordonnées du point mobile,

$$xy\,(X - x) + y^2\,(Y - y) + \left[\frac{\omega^2}{p'}(x^2 + y^2) + yz\right](Z - z) = 0.$$

69. Nous allons conclure de cette formule la courbure des trajectoires.

Courbure sphérique de la trajectoire d'un point sur une sphère.

Revenons à la considération de la figure sphérique. On peut se proposer à son sujet les mêmes problèmes que nous avons traités dans le plan. La droite ID tangente commune aux courbes I_m, I_f est, dans le choix particulier d'axes adopté, parallèle à Ox. Le point I a la même vitesse V sur ces deux courbes et on peut supposer que le sens de cette vitesse soit celui de Ox et de ID. Soit M un point mobile, et faisons passer un grand cercle Δ par M et I; fixons un sens de parcours sur ce cercle, et soit θ l'angle que fait avec ID la tangente en I à ce grand cercle menée dans le sens de parcours choisi, soit aussi r l'angle au centre de l'arc de grand cercle IM compté de I vers M dans le sens de parcours choisi sur Δ. Le grand cercle Δ est normal à la trajectoire du point M; il touche en un point μ la développée sphérique de cette trajectoire. Nous désignerons par ρ l'angle au centre de l'arc de grand cercle Iμ compté de I vers μ dans le sens de parcours choisi sur Δ. Il existe entre r et ρ une relation analogue à la formule de Savary.

Formule analogue à celle de Savary.

Le point μ est le pôle du petit cercle osculateur de la trajectoire; ses coordonnées x_1, y_1, z_1, eu égard à l'équation trouvée pour le plan osculateur, devront donc vérifier les équations

$$\frac{x_1}{xy} = \frac{y_1}{y^2} = \frac{z_1}{\frac{\omega}{p'}(x^2 + y^2) + yz};$$

or, on a, R étant toujours le rayon de la sphère,

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin\rho \cos\theta, & x &= R \sin r \cos\theta, \\ y_1 &= R \sin\rho \sin\theta, & y &= R \sin r \sin\theta, \\ z_1 &= R \cos\rho, & z &= R \cos r. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les équations précédentes on trouve qu'elles se réduisent à une seule

$$\frac{1}{\tan\rho} - \frac{1}{\tan r} = \frac{1}{k \sin\theta},$$

où l'on a posé

$$k = \frac{p'}{\omega^2}.$$

Cette formule rappelle par sa forme celle de Savary.

Interprétation de k.

Nous allons chercher à interpréter k.

On a, en général, pour l'accélération absolue d'un point (x, y, z) animé d'un mouvement relatif,

$$\begin{aligned}
J_{a,x} &= q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2},\\
J_{a,y} &= r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y} + 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2},\\
J_{a,z} &= p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial x} + 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Appliquons ces formules au mouvement absolu du point I. Puisque ID est la tangente aux courbes I_f, I_m, en appelant V la valeur commune à la vitesse relative et à la vitesse absolue (vitesse propre) du centre instantané, on a, dans le système d'axes adopté,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = R, \quad \frac{dx}{dt} = V, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

en même temps que $p = q = q' = 0$, $r = \omega$. On a alors

$$\begin{aligned}
J_{a,x} &= \frac{d^2x}{dt^2},\\
J_{a,y} &= -p'R + 2\omega V + \frac{d^2y}{dt^2},\\
J_{a,z} &= \frac{d^2z}{dt^2};
\end{aligned}$$

d'un autre côté, les coordonnées du centre instantané I sont d'une façon générale égales à

$$x = \frac{p}{\omega}R, \quad y = \frac{q}{\omega}R, \quad z = \frac{r}{\omega}R,$$

où $\omega = +\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$; on a donc en particulier

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{p'}{\omega} - \frac{\omega'}{\omega^2}p\right)R,\\
\frac{dz}{dt} &= \left(\frac{r'}{\omega} - \frac{\omega'}{\omega^2}r\right)R,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \left[\frac{r''}{\omega} - 2\frac{r'\omega'}{\omega^2} - \frac{\omega''}{\omega^2}r + 2\frac{\omega'^2}{\omega^3}r\right]R.
\end{aligned}$$

Faisons $p = q = 0$, il viendra, puisque V est la valeur de $\frac{dx}{dt}$ et que $r = \omega$,

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{p'}{\omega} R,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left[\frac{r''}{\omega} - 2\frac{r'\omega'}{\omega^2} - \frac{\omega''}{\omega} + \frac{2\omega'^2}{\omega^2}\right] R;$$

mais de

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

on tire

$$\omega\omega' = pp' + qq' + rr'$$

$$\omega'^2 + \omega\omega'' = pp'' + qq'' + rr'' + p'^2 + q'^2 + r'^2,$$

et en faisant $p = q = 0$, $q' = 0$, $\omega = r$, il reste

$$r' = \omega',$$

$$\omega'' = r'' + \frac{p'^2}{\omega},$$

en sorte que l'on a simplement

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{p'^2}{\omega^2} R.$$

Les expressions de $J_{a,x}$, $J_{a,y}$, $J_{a,z}$ deviennent ainsi

$$J_{a,x} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$J_{a,y} = p' R + \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$J_{a,z} = -\frac{p'^2}{\omega^2} R.$$

Considérons le grand cercle normal à la fois aux deux roulettes I_f, I_m au point I, et menons à ce cercle la tangente ID′ parallèle à Oy, il y a un sens de parcours sur ce cercle qui a le sens de ID′, nous le prendrons pour sens direct. Ce grand cercle touche en des points O_f, O_m les développées sphériques des courbes I_f, I_m. Désignons par R_f, R_m les angles IOO_f, IOO_m décrits dans le sens direct de I vers O_f et de I vers O_m.

Les coordonnées de O_f seront

$$0, \quad R \sin R_f, \quad R \cos R_f.$$

Or, la droite OO_f est normale au plan osculateur en I à I_f, OO_f est donc rectangulaire avec $\overline{J_a}$ et l'on a, en conséquence,

$$0 = 0.J_{a,x} + R \sin R_f . J_{a,y} + R \cos R_f . J_{a,z},$$

ou

$$\left(p' R + \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \sin R_f - \frac{p'^2}{\omega^2} R \cos R_f = 0,$$

ou encore

$$\frac{\omega^2}{p'} + \frac{\omega^2}{p'^2 R} \frac{d^2 y}{dt} = \operatorname{cotg} R_f.$$

De même, comme OO_m est normale au plan osculateur à I_m, elle est rectangulaire avec l'accélération relative, on a donc

$$0 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + R \sin R_m \frac{d^2 y}{dt^2} + R \cos R_m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

ou encore, eu égard à la valeur de $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$,

$$\frac{\omega^2}{p'^2 R} \frac{d^2 y}{dt^2} = \operatorname{cotg} R_m,$$

d'où par soustraction

$$\frac{1}{k} = \frac{\omega^2}{p'} = \frac{1}{\operatorname{tang} R_f} - \frac{1}{\operatorname{tang} R_m},$$

formule qui complète l'analogie avec le cas du plan.

On en conclut sans peine la propriété suivante du centre de courbure sphérique de la trajectoire d'un point.

Soient Δ *le grand cercle mené par le centre instantané* I *et le point mobile* M, Δ' *le grand cercle mené par le centre instantané* I *normalement à* Δ, *les grands cercles* MO_m *et* μO_f, *où* μ *est le centre de courbure cherché se coupent en* H *sur* Δ'.

Angles d'Euler.

70. Dans certaines questions, il est nécessaire de savoir représenter analytiquement au moyen du nombre minimum de variables le mouvement d'un trièdre mobile par rapport à un trièdre fixe de même sommet. On arrive à ce but en employant les angles d'Euler.

Soient $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ les deux trièdres trirectangles mobile et fixe; coupons-les par une sphère ayant son centre en leur sommet commun O. Désignons par x, y, z, x_1, y_1, z_1 les traces des axes $Ox, Oy, Oz, Ox_1, Oy_1, Oz_1$ sur cette sphère et par N un des deux points d'intersection des grands cercles xy et x_1y_1. Une rotation directe autour de Oz_1 amènera Ox_1 sur ON; appelons ψ l'amplitude de cette rotation. Une autre rotation directe autour de Oz amènera ON sur Ox, appelons φ son amplitude; enfin comme ON est perpendiculaire au plan z_1Oz, une rotation autour de ON dans le sens direct, d'amplitude θ, amènera Oz_1 sur Oz.

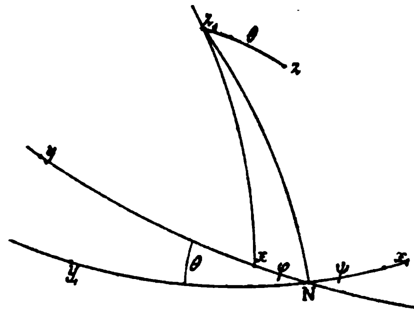


Fig. 61.

Les angles θ, φ, ψ connus permettront de trouver la position du trièdre $Oxyz$ par rapport au trièdre $Ox_1y_1z_1$. En effet, on aura ON par une rotation directe ψ de Ox_1 autour de Oz_1; on aura Oz par une rotation directe θ de Oz_1 autour de ON, et enfin Ox par une rotation directe φ de ON autour de Oz; en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à cette dernière rotation on aura Oy.

Expressions de p, q, r en fonction des angles d'Euler.

Quand le trièdre $Oxyz$ subit un déplacement infiniment petit, les trois angles varient infiniment peu et l'on peut regarder la rotation instantanée comme résultant des trois rotations qui naissent de la variation de ces angles. Nous aurons donc, pour obtenir la rotation instantanée, à composer une rotation $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ autour de Oz_1; une rotation $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$ autour de Oz; une rotation $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ autour de ON. On peut représenter ces rotations par des segments portés par leurs axes respectifs; les sommes des projections de ces segments sur Ox, Oy, Oz seront les projections p, q, r de la rotation instantanée.

Nous aurons donc

$$
\begin{aligned}
p &= \psi' \cos(\widehat{z_1 x}) + \varphi' \cos(\widehat{z x}) + \theta' \cos(\widehat{N x}),\\
q &= \psi' \cos(\widehat{z_1 y}) + \varphi' \cos(\widehat{z y}) + \theta' \cos(\widehat{N y}),\\
r &= \psi' \cos(\widehat{z_1 z}) + \varphi' \cos(\widehat{z z}) + \theta' \cos(\widehat{N z}).
\end{aligned}
$$

Observons que

$$\cos\widehat{(zx)} = \cos\widehat{(zy)} = \cos\widehat{(Nz)} = 0, \quad \cos\widehat{(zz)} = 1,$$
$$\cos\widehat{(Nx)} = \cos\varphi, \quad \cos\widehat{(Ny)} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$
$$\cos\widehat{(z_1 z)} = \cos\theta,$$

il viendra

$$p = \psi' \cos\widehat{(z_1 x)} + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \cos\widehat{(z_1 y)} - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Nous n'avons à calculer que les deux cosinus $\cos\widehat{(z_1 x)}$, $\cos\widehat{(z_1 y)}$.

Menons les grands cercles $z_1 x$ et $z_1 N$, le triangle sphérique $z_1 x N$ nous donnera

$$\cos\widehat{(z_1 x)} = \cos\widehat{(z_1 N)}.\cos\widehat{(Nx)} + \sin\widehat{(z_1 N)}.\sin\widehat{(Nx)} \cos\widehat{(xNz_1)}.$$

Or $\widehat{z_1 N} = \frac{\pi}{2}$, il reste donc

$$\cos\widehat{(z_1 x)} = + \sin\widehat{(Nx)} \cos\widehat{(xNz_1)};$$

Mais

$$\widehat{Nx} = \varphi, \quad \widehat{xNz_1} = \frac{\pi}{2} - \widehat{y_1 N x} = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

donc

$$\cos\widehat{(z_1 x)} = + \sin\varphi.\sin\theta.$$

On peut observer qu'on passe de x à y en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\cos\widehat{(z_1 y)} = + \cos\varphi.\sin\theta,$$

et finalement

$$p = \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Expression des cosinus directeurs. Dans quelques problèmes on peut avoir besoin de calculer les neuf cosinus directeurs en fonction de θ, φ, ψ. La méthode suivie pour

$\cos \widehat{(z_1 x)}$ permet de former le tableau de ces neuf cosinus :

$$\cos \widehat{(x x_1)} = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta,$$
$$\cos \widehat{(x y_1)} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta,$$
$$\cos \widehat{(x z_1)} = \sin \varphi \sin \theta;$$

$$\cos \widehat{(y x_1)} = - \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta,$$
$$\cos \widehat{(y y_1)} = - \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta,$$
$$\cos \widehat{(y z_1)} = \cos \varphi \sin \theta.$$

$$\cos \widehat{(z x_1)} = \sin \psi \sin \theta,$$
$$\cos \widehat{(z y_1)} = - \cos \psi \sin \theta,$$
$$\cos \widehat{(z z_1)} = \cos \theta.$$

Expressions rationnelles des neuf cosinus.

Si, dans les formules précédentes, on exprime les lignes trigonométriques des arcs φ, ψ, θ en fonctions rationnelles de trois paramètres l, m, n qui seront par exemple les tangentes des moitiés de ces arcs, on obtiendra pour expression des neuf cosinus des fonctions rationnelles des paramètres l, m, n.

On arrive à des expressions rationnelles plus symétriques en opérant de la façon suivante :

Posons

$$t = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \qquad u = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2},$$
$$v = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \qquad w = - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2};$$

on constate tout d'abord que ces fonctions sont liées par l'équation unique

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

Formules d'Olinde Rodrigues.

on trouve ensuite que les formules précédentes qui fournissent les neuf cosinus peuvent s'écrire, avec ces notations :

$$\cos(x, x_1) = t^2 - u^2 - v^2 + w^2, \qquad \cos(y, x_1) = 2(tu + vw),$$
$$\cos(x, y_1) = 2(tu - vw), \qquad \cos(y, y_1) = - t^2 + u^2 - v^2 + w^2,$$
$$\cos(x, z_1) = 2(tv + uw), \qquad \cos(y, z_1) = 2(vu - tw);$$
$$\cos(z, x_1) = 2(tv - uw),$$
$$\cos(z, y_1) = 2(uv + tw),$$
$$\cos(z, z_1) = - t^2 - u^2 + v^2 + w^2.$$

Au lieu des variables θ, φ, ψ dont t, u, v, w sont des fonctions, introduisons cinq variables homogènes λ, μ, ν, ρ, σ en posant

$$t = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad u = \frac{\mu}{\sigma}, \quad v = \frac{\nu}{\sigma}, \quad w = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Les variables λ, μ, ν, ρ, σ seront liées par l'équation

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{\sigma^2} = 1,$$

et les expressions des neuf cosinus deviennent, en y remplaçant σ^2 par sa valeur tirée de cette dernière équation

$$\cos(x, x_1) = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(x, y_1) = \frac{2(\lambda\mu - \nu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(x, z_1) = \frac{2(\lambda\nu + \mu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(y, x_1) = \frac{2(\lambda\mu + \nu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(y, y_1) = \frac{-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(y, z_1) = \frac{2(\mu\nu - \lambda\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(z, x_1) = \frac{2(\lambda\nu - \mu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(z, y_1) = \frac{2(\mu\nu + \lambda\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$
$$\cos(z, z_1) = \frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}.$$

Ces formules où λ, μ, ν, ρ sont des quantités arbitraires qu n'interviennent que par leurs rapports, portent le nom d'Olinde Rodrigues. Elles se prêtent particulièrement aux recherches de géométrie algébrique sur le mouvement d'un corps solide. C'est ainsi, par exemple, que M. Darboux en a déduit divers mouvements très remarquables; dans certains les points de la figure décrivent tous des coniques; dans d'autres, où les paramètres indépendants sont au nombre de deux, les points de la figure décrivent tous des surfaces de Steiner.

CHAPITRE IX

Mouvement continu le plus général d'un corps solide.

71. Les chapitres précédents nous ont offert deux exemples particuliers, mais importants, du mouvement d'un corps solide. Moins important au point de vue des applications, le cas général se prête à une étude analogue dont nous allons tracer les traits essentiels.

Dans les deux cas considérés précédemment, la distribution des vitesses se réduisait à une simple rotation; cette circonstance, qui peut se présenter dans des cas plus généraux, entraîne pour le mouvement continu des propriétés particulières qui n'appartiennent pas au cas général.

Courbes liées à la figure mobile et qui ont une enveloppe.

Constatons d'abord qu'une courbe C liée à la figure mobile n'a pas, en général, d'enveloppe sur la surface qu'elle décrit. Cherchons, en effet, une courbe C qui ait une enveloppe, c'est-à-dire qui, à chaque instant, touche une courbe (C) par un de ses points P. Ce point P est mobile à la fois sur la courbe C et sur l'enveloppe (C); la première courbe est sa trajectoire relative, la seconde est sa trajectoire absolue. Puisque ces deux courbes se touchent, par hypothèse, au point P, il faut que la vitesse absolue et la vitesse relative de P soient portées par une même droite, tangente commune à ces deux courbes. La vitesse d'entraînement du point P est donc elle aussi portée par cette tangente et, par suite, on exprimera le contact des courbes C et (C) en écrivant que la vitesse relative de P est portée par la même droite que la vitesse d'entraînement. Nous aurons ainsi, λ désignant un

coefficient de proportionnalité,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(\xi + qz - ry), \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda(\eta + rx - pz), \\ \dfrac{dz}{dt} = \lambda(\zeta + py - qx), \end{cases}$$

où x, y, z sont les coordonnées relatives du point P. On peut reconnaître par ces équations que la courbe C ne saurait être prise arbitraire.

On tire, en effet, de ces équations

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\xi + qz - ry}{\zeta + py - qx}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\eta + rx - pz}{\zeta + py - qx};$$

et comme p, q, r, ξ, η, ζ sont des fonctions connues du temps, en éliminant t entre ces deux équations il en résultera une équation

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

que devra vérifier la courbe C.

Si l'on veut avoir les courbes C qui ont une enveloppe, il est préférable de conserver les équations (1), où λ désigne une fonction arbitraire du temps. Si l'on sait trouver toutes les fonctions x, y, z, λ qui vérifient ces équations, on sait trouver toutes les courbes C qui, liées à la figure mobile, offrent la propriété d'avoir une enveloppe.

On trouve par des quadratures toutes les courbes douées d'enveloppe.

Je vais prouver que le problème peut être ramené aux quadratures. Il me suffira d'appliquer à ce problème une méthode d'intégration due à M. Darboux, et qui ramène à une équation de Riccati la recherche du mouvement continu quand les rotations sont données.

Observons d'abord que si l'on considère le système d'équations différentielles

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(qz - ry), \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda(rx - pz), \\ \dfrac{dz}{dt} = \lambda(py - qx), \end{cases}$$

la variation des constantes arbitraires permettra de déduire par quadratures des intégrales du système (2) les intégrales du système (1). Le système (2) n'est autre, en effet, que le système (1) privé des termes $\lambda\xi$, $\lambda\eta$, $\lambda\zeta$.

Cherchons donc à intégrer le système (2).

Pour intégrer le système de la forme

$$(2)' \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ry - qz, \\ \dfrac{dy}{dt} = pz - rx, \\ \dfrac{dz}{dt} = qx - py, \end{cases}$$

M. Darboux observe que pour tout système x, y, z de solutions on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.},$$

ce que nous avons du reste déjà vu au n° 40 (page 122). La constante n'est pas nulle en général, et en multipliant x, y, z par un même nombre constant on peut réduire à 1 cette constante.

Nous aurons alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

ce qui nous permet de poser, u, v étant deux variables indépendantes,

$$(3) \qquad x = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad y = i\,\frac{1 + uv}{u - v}, \quad z = \frac{u + v}{u - v},$$

et nous trouverons, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs dans les équations (2)′, que u, v doivent vérifier une même équation de Riccati, à savoir (Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 22) :

$$(4) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -ir\sigma + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2}\,\sigma^2.$$

Les équations (2)′ sont les équations (3) du n° 40 (page 121). On voit donc comment le passage des rotations au mouvement continu se fait par une équation de Riccati.

Appliquons ceci au système (2) qui ne diffère de (2)′ que par le changement de p, q, r en $-\lambda p$, $-\lambda q$, $-\lambda r$. Au moyen du même

raisonnement nous verrons qu'on peut exprimer x, y, z en fonction de deux paramètres u, v par les formules (3) et que u, v doivent vérifier l'équation de Riccati.

$$(5) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{q+ip}{2}\lambda.\sigma^2 + ir\lambda.\sigma - \frac{q-ip}{2}\lambda.$$

Mais puisque λ est une fonction arbitraire de t, on pourra choisir λ de manière à connaître *a priori* une intégrale de l'équation de Riccati. Dès lors on obtiendra par quadratures l'intégrale générale de cette équation. On aura ainsi par quadratures la solution générale du système (2) et par trois autres quadratures la solution générale du système (1).

Ainsi, malgré que le problème du mouvement fini, quand on donne les rotations, dépende d'une équation de Riccati irréductible, toutefois on peut déterminer par quadratures les courbes liées au corps qui ont une enveloppe. Ces enveloppes constituent inversement les courbes de l'espace fixe qui, dans le mouvement inverse, ont une enveloppe.

Si, au lieu de procéder comme nous l'avons fait, nous nous étions donné *a priori* la fonction λ, nous serions tombé sur une équation de Riccati (5), dans laquelle on ne connaît aucune solution et, par conséquent irréductible. C'est ainsi que si l'on cherche les courbes de la figure mobile qui passent par des points fixes, on doit prendre $\lambda = -1$. Le système (1) devient alors celui dont dépend le passage des rotations au mouvement fini et l'équation de Riccati est alors exactement l'équation (4) de M. Darboux.

En général il y a un glissement.

On observera que si une courbe C de la figure mobile touche une courbe fixe (C), la vitesse absolue et la vitesse relative ont une différence égale à la vitesse d'entraînement du point P. Cette vitesse n'est jamais nulle, sauf toutefois le cas intéressant où le mouvement hélicoïdal tangent se réduirait à une simple rotation et où le point P serait constamment sur l'axe autour duquel elle s'effectue. Donc la courbe C, tout en restant tangente à son enveloppe (C), *glisse* en général sur elle.

Viration des surfaces réglées.

72. On ne doit donc pas espérer de réaliser le mouvement continu le plus général d'un corps solide au moyen d'un roulement sans glissement, comme nous l'avons vu dans les deux cas déjà étudiés.

Appelons Δ_f la surface lieu de l'axe du mouvement hélicoïdal dans

l'espace fixe et Δ_m la surface lieu du même axe dans la figure mobile. A chaque instant Δ_m et Δ_f ont en commun une génération Δ qui est, à cet instant, l'axe du mouvement hélicoïdal. On va montrer que *ces deux surfaces réglées se raccordent à chaque instant suivant cette droite.*

Prenons, en effet, un point M sur la droite Δ et observons que la trajectoire absolue de M est une courbe tracée sur Δ_f, tandis que sa trajectoire relative est tracée sur Δ_m. Le plan mené par Δ et par la vitesse relative $\overline{V}_r$ est tangent en M à Δ_m; le plan mené par Δ et la vitesse absolue $\overline{V}_a$ est tangent en M à Δ_f. Or, la différence géométrique $\overline{V}_a - \overline{V}_r = \overline{V}_e$ représente la vitesse d'entraînement, laquelle est ici portée par Δ puisque le point M est sur l'axe du mouvement hélicoïdal. Donc $\overline{V}_a$, $\overline{V}_r$, $\overline{V}_e$ étant dans un même plan, il en est de même de $\overline{V}_a$, $\overline{V}_r$ et Δ. Les deux plans tangents ci-dessus définis coïncident donc. Les surfaces Δ_m, Δ_f admettent ainsi le même plan tangent en chaque point de leur génératrice commune Δ.

On peut donc énoncer ce théorème :

Dans le mouvement le plus général d'une figure invariable il y a toujours une surface réglée Δ_m qui se racoorde à chaque instant avec une surface réglée Δ_f suivant une génératrice rectiligne Δ, qui se trouve être l'axe du mouvement hélicoïdal tangent.

Reuleaux, dans son édition française de sa *Cinématique,* désigne par le mot de *viration* le roulement particulier de Δ_m sur Δ_f.

Si l'on se reporte à la démonstration précédente, on voit que jamais aucune courbe tracée sur Δ_m ne restera tangente à une courbe. Cette seconde courbe devrait être, en effet, tracée sur Δ_f et alors, en regardant la courbe tracée sur Δ_m comme la trajectoire relative du point M où elle est coupée par la génératrice Δ, on voit que les vitesses $\overline{V}_a$, $\overline{V}_r$ devraient être portées par une même droite. Or, la différence géométrique $\overline{V}_a - \overline{V}_r$ est égale à la vitesse d'entraînement, qui est le glissement $h\omega$ suivant l'axe Δ. Donc les vitesses $\overline{V}_a$ et $\overline{V}_r$ ne pourront être portées par une même droite que dans deux cas : 1° si $\overline{V}_e$ est nul, ce qui exige $h = 0$, et alors le mouvement hélicoïdal tangent se réduit à une rotation; 2° si $\overline{V}_a$ est dirigée suivant Δ, auquel cas $\overline{V}_r$ est aussi dirigé suivant Δ, alors Δ_f et Δ_m sont deux développables dont les arêtes sont constamment en contact.

Nous allons étudier ces divers cas.

Cas où il existe à chaque instant une rotation tangente.

73. Supposons d'abord le cas où le mouvement hélicoïdal tangent se réduit à une simple rotation. On en sera averti par ce fait que l'expression

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0$$

sera nulle sans que p, q, r le soient; si p, q, r étaient nuls constamment nous aurions à chaque instant une translation tangente et (p. 31) le mouvement se réduirait à une translation continue.

Applicabilité des surfaces Δ_f, Δ_m si le glissement est nul.

Dans le cas d'une rotation tangente, tous les points de l'axe instantané Δ ont alors une vitesse d'entraînement nulle; je vais montrer que *les surfaces Δ_f, Δ_m, qui se raccordent suivant cet axe Δ, sont en outre applicables l'une sur l'autre.*

En effet, reprenons un point M mobile sur l'axe Δ, soient C_m sa trajectoire sur Δ_m et C_f sa trajectoire sur Δ_f; nous avions trouvé précédemment $\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e}$; puisque $\overline{V_e}$ est ici nul, on a simplement

$$\overline{V_a} = \overline{V_r}.$$

Il en résulte que *la courbe C_m roule sans glisser sur la courbe C_f.* Comme on peut régler le mouvement de M sur Δ de sorte que C_m soit une courbe quelconque de Δ_m, on voit que dans le mouvement toute courbe C_m tracée sur Δ_m roule sans glissement sur une courbe correspondante tracée sur Δ_f.

Au cours du mouvement tout point P de Δ_m vient s'appliquer sur un certain point Q de Δ_f; en sorte que, par suite de ce mouvement, une correspondance se trouve établie entre les points P de Δ_m et les points Q de Δ_f. Quand P décrit C_m sur Δ_m, Q décrit C_f sur Δ_f; or, d'après la propriété du roulement sans glissement des courbes C_m et C_f, un arc de C_f se trouve être égal à son homologue. La correspondance ponctuelle entre les surfaces est donc de telle nature que les longueurs des arcs homologues sont égales; il en résulte que les deux surfaces réglées sont applicables l'une sur l'autre et la correspondance considérée réalise cette application.

Déformation des surfaces réglées.

La déformation des surfaces réglées sans altération des arcs est ainsi rattachée à la question du mouvement d'un corps solide. En sorte que le problème de la déformation des surfaces réglées coïncide avec le suivant :

Une surface réglée Δ_m étant donnée, trouver tous les mouvements dans lesquels cette surface VIRE *sans glisser sur une autre surface réglée Δ_f.*

Le problème se ramène aux quadratures.

Soient, en effet, a, b, c, l, m, n les cosinus directeurs et les moments d'une génératrice Δ de Δ_m, cosinus et moments pris par rapport à un trièdre lié invariablement à la surface Δ_m. On peut regarder ces six coordonnées comme des fonctions connues du temps t. Désignons par $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les coordonnées de la rotation instantanée. Cette rotation ayant lieu autour de Δ_m on doit avoir

$$p = a.\omega, \quad q = b.\omega, \quad r = c.\omega,$$
$$\xi = l.\omega, \quad \eta = m.\omega, \quad \zeta = n.\omega,$$

et ω est l'amplitude de la vitesse angulaire, laquelle est une fonction inconnue du temps. Pour résoudre le problème dans toute sa généralité il suffira, pour chaque détermination de ω, de chercher à passer des rotations au mouvement fini, question qui est équivalente à l'intégration des équations

$$\frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} + \eta + rx - pz = 0,$$
$$\frac{dz}{dt} + \zeta + py - qx = 0.$$

Or, ici, ces équations s'écrivent

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + \omega\,(l + bz - cy) = 0, \\ &\frac{dy}{dt} + \omega(m + cx - az) = 0, \\ &\frac{dz}{dt} + \omega\,(n + ay - bx) = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous tombons donc sur des équations qui ont la forme des équa-

tions (1) du n° 71. Nous avons vu comment on pourra profiter de la fonction arbitraire ω pour ramener le problème à des quadratures.

Les équations (6) ont, du reste, une signification intéressante.

Supposons qu'on ait pris pour ω une certaine fonction ω_0, en sorte que le système des rotations p, q, r, ξ, η, ζ est défini. Si l'on veut les courbes liées à Δ_m qui, dans le mouvement ainsi défini, ont une enveloppe, il faudra former les équations (1) du n° 71 relatives à ce problème, c'est-à-dire

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda\omega_0\,(l + bz - cy), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda\omega_0(m + cx - az), \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda\omega_0\,(n + ay - bx). \end{aligned} \right.$$

Mais comme λ est une fonction arbitraire, de même que ω l'est dans les équations (6), on voit que les équations (7) ne diffèrent pas des équations (6).

Remarque sur les courbes à enveloppes liées à la surface Δ_m.

On en peut conclure ce fait curieux que *quelle que soit la surface Δ_f sur laquelle Δ_m vire sans glisser, les courbes liées à Δ_m qui ont une enveloppe sont* TOUJOURS LES MÊMES.

Cette remarque pourrait avoir des applications industrielles. Supposons, en effet, qu'on ait construit un équipage des courbes C liées invariablement à Δ_m. Le même équipage pourra servir à rouler en glissant et à guider ainsi le roulement sans glissement de Δ_m sur plusieurs autres surfaces Δ_f, Δ'_f, munies chacune d'équipages correspondants. On évitera ainsi de munir Δ_m d'un équipage spécial pour son roulement sur Δ_f, d'un autre équipage spécial pour son roulement sur Δ'_f....

Le fait de la réduction aux quadratures du problème que l'on vient de résoudre est en concordance avec cet autre que la détermination des surfaces réglées applicables sur une surface réglée donnée contient une fonction arbitraire et se résoud par quadratures. (Voir Darboux, *Leçons*, t. III, p. 297.)

Roulement des développables et des courbes gauches.

Cas où Δ_m, Δ_f sont des développables.

74. Il peut arriver que les surfaces réglées Δ_m, Δ_f soient toutes développables. La propriété du raccordement démontrée dans le cas général prouve que l'une n'est jamais seule développable sans l'autre; car si le plan tangent est le même tout le long de Δ pour l'une, il doit en être de même pour l'autre.

La condition pour que Δ_m soit développable est aisée à trouver. Les coordonnées de l'axe Δ sont proportionnelles à

$$p, \; q, \; r, \quad \xi - hp, \quad \eta - hq, \quad \zeta - hr,$$

la condition cherchée s'écrit

$$dp.d\,(\xi - hp) + dq.d\,(\eta - hq) + dr\,d\,(\zeta - hr) = 0.$$

Mais nous ne l'utiliserons pas.

Appelons A_m l'arête de rebroussement de Δ_m, A_f celle de Δ_f, ces arêtes pouvant du reste se réduire à des points si les développables sont des cônes. Soient A le point où l'axe Δ du mouvement hélicoïdal touche A_m, $\overline{V_a}$, $\overline{V_r}$, $\overline{V_e}$ les vitesses absolue, relative et d'entraînement de A.

La vitesse relative $\overline{V_r}$ et la vitesse d'entraînement $\overline{V_e}$ du point A sont toutes deux portées par l'axe Δ; il en est donc de même de la vitesse absolue $\overline{V_a}$. Il en résulte que la trajectoire absolue du point A est une courbe à laquelle Δ est tangente, cette trajectoire est donc l'arête de rebroussement A_f de Δ_f. Ainsi dans le mouvement la courbe A_m reste tangente à A_f et a constamment avec elle le même plan osculateur.

Cependant on ne peut dire que A_m roule sans glissement sur A_f, car la vitesse d'entraînement $\overline{V_e}$ du point A n'est point nulle. Le glissement ne cessera d'exister que si $\overline{V_e}$ est nulle, c'est-à-dire, puisque $\overline{V_e}$ est égale à la translation suivant l'axe, que *le contact des courbes A_m, A_f ne se produira sans glissement que dans le cas déjà étudié où il y a à chaque instant une rotation tangente.*

Cas des cônes.

Observons encore que si Δ_m est un cône, la vitesse relative du

point A est nulle, la vitesse absolue du point A est égale à sa vitesse d'entraînement, et dans le mouvement le cône roule sur la développable Δ_f pendant que son sommet décrit la courbe A_f.

Inversement, si Δ_f est un cône, la vitesse absolue de A est nulle, la vitesse relative de A est égale et opposée à sa vitesse d'entraînement; elle est encore dirigée suivant l'axe Δ. Pendant le mouvement, la développable Δ_m roule sur le cône Δ_f, tandis que l'arête A_m passe constamment par le sommet fixe du cône Δ_f.

Si l'une des deux surfaces Δ_f, Δ_m est un cône et si, en même temps, on se trouve dans le cas où le mouvement hélicoïdal se réduit constamment à une simple rotation, on voit que la seconde surface doit être également un cône. En effet, de la relation $\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e}$ on tire, puisque $\overline{V_e} = 0$, la relation $\overline{V_a} = \overline{V_r}$. La vitesse absolue et la vitesse relative du point A sont donc nulles en même temps.

Roulement des courbes.

Revenons au cas général où les surfaces Δ_f, Λ_m ne sont pas des cônes, mais bien des développables. Les arêtes A_f, A_m de ces développables ont à chaque instant le même trièdre T formé par la tangente, la normale principale et la bi-normale. Seulement, la normale principale n'est pas forcément dirigée vers le centre de courbure, en sorte que le rayon de courbure aura, comme le rayon de torsion, un signe. Nous avons vu à la page 124 que si l'on suppose une courbe parcourue avec une vitesse égale à l'unité, les rotations du trièdre entraîné par la courbe ont pour coordonnées

$$1,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{T},\ 0,\ \frac{1}{R};$$

si l'on suppose que la courbe soit parcourue avec la vitesse V, il suffit évidemment de multiplier par V toutes ces quantités pour obtenir les véritables valeurs des coordonnées du système des rotations.

Prenons donc le trièdre T, qui est, comme nous l'avons dit, commun aux deux courbes A_f, A_m.

Appelons V_a la vitesse absolue du point A, c'est-à-dire sa vitesse sur la courbe A_f, R_a, T_a les rayons de courbure de cette courbe, les rotations du trièdre T dans son mouvement par rapport à A_f ont pour coordonnées

$$V_a,\ 0,\ 0,\ -\frac{V_a}{T_a},\ 0,\ \frac{V_a}{R_a}.$$

De même, dans le mouvement par rapport à A_m, les coordonnées des rotations du même trièdre T seront

$$V_r, \quad 0, \quad 0, \quad -\frac{V_r}{T_m}, \quad 0, \quad \frac{V_r}{R_m},$$

où V_r est la vitesse relative de A, c'est-à-dire sa vitesse sur A_m, et R_m, T_m les rayons de courbure de A_m [1].

Dès lors, dans le mouvement de A_m par rapport à A_f, la vitesse d'entraînement d'un point M lié à A_m et dont x, y, z sont les coordonnées relatives au trièdre T, aura pour projections sur les axes de ce trièdre (n° 42, p. 128).

$$v_x = V_a - V_r - \left(\frac{V_a}{R_f} - \frac{V_r}{R_m}\right) y,$$
$$v_y = \left(\frac{V_a}{R_f} - \frac{V_r}{R_m}\right) x + \left(\frac{V_a}{T_f} - \frac{V_r}{T_m}\right) z,$$
$$v_z = -\left(\frac{V_a}{T_f} - \frac{V_r}{T_m}\right) y.$$

Ces formules conviendraient au cas général où A_m roulerait en glissant sur A_f et en ayant constamment avec A_f le même plan osculateur. Mais, dans le cas actuel, Ox est l'axe du mouvement hélicoïdal; tous les points de Ox ont la même vitesse, ce qui exige que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{V_a}{R_f} - \frac{V_r}{R_m} = 0;$$

et il reste alors simplement

$$(9) \quad v_x = V_a - V_r, \qquad v_y = \left(\frac{V_a}{T_f} - \frac{V_r}{T_m}\right) z, \qquad v_z = -\left(\frac{V_a}{T_f} - \frac{V_r}{T_m}\right) y.$$

La relation (8) exprime le fait suivant :

Soient σ_f, σ_m les arcs des courbes indicatrices sphériques des tangentes des courbes A_f, A_m et s_f, s_m les arcs de ces courbes elles-mêmes, comptés dans le sens du mouvement du point A, on a

$$\frac{V_a}{R_f} = \frac{ds_f}{dt} \cdot \frac{d\sigma_f}{ds_f} = \frac{d\sigma_f}{dt}, \quad \frac{V_r}{R_m} = \frac{d\sigma_m}{dt};$$

l'équation (8) s'écrit donc

$$d\sigma_f = d\sigma_m,$$

[1] Page 208, remplacer R_a et T_a par R_f et T_f.

ou $\sigma_f = \sigma_m$, en comptant les arcs à partir de points correspondants. Or, appelons Γ_f le cône directeur des tangentes de A_f; soit S le sommet de ce cône et construisons à chaque instant le cône directeur Γ_m des tangentes de A_m, ayant lui aussi S pour sommet; les diverses positions de Γ_m s'obtiendront en faisant rouler ce cône sur le cône Γ_f, et l'équation précédente exprime que *ce roulement a lieu sans glissement*.

Ainsi, lorsque deux développables roulent l'une sur l'autre en se touchant constamment suivant une génératrice *qui est à chaque instant l'axe du mouvement hélicoïdal*, les cônes directeurs de ces développables roulent l'un sur l'autre *sans glissement*.

Cas où les développables roulent sans glisser.

Supposons en outre que le mouvement hélicoïdal se réduise à une simple rotation, le glissement suivant l'axe étant nul, on a $V_a = V_r = V$ et les deux courbes A_f, A_m roulent l'une sur l'autre sans glisser. Dans ce cas l'équation (8) nous donne

$$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_m},$$

en sorte que les deux courbes ont même courbure aux points qui viennent en contact. Les formules (9) deviennent alors

$$v_x = 0, \quad v_y = V\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_m}\right)z, \quad V_z = -V\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_m}\right)y.$$

Ce dernier mouvement des courbes A_f, A_m est remarquable à cause de cette circonstance que, dans cette sorte de roulement sans glissement de A_m sur A_f, l'axe instantané de rotation est justement la tangente commune aux deux courbes, tandis que dans les roulements que nous avions jusqu'ici considérés l'axe instantané était normal aux deux courbes roulantes.

Roulement général des surfaces réglées.

75. Il est bon d'indiquer ici quel rôle particulier jouent les surfaces Δ_m, Δ_f et en quoi leur *viration* se distingue du roulement ordinaire avec glissement.

Caractère distinctif de la viration.

Nous arriverons à cette conclusion que dans la viration le glissement a toujours lieu *suivant la génératrice de contact*, tandis que

dans le roulement ordinaire il y a toujours un glissement oblique à la génératrice de contact.

Examinons donc dans quelles conditions une surface réglée roulera sur une autre surface réglée.

Rappelons que pour avoir les points où une surface S mobile touche son enveloppe, il faut chercher sur S le lieu des points dont les normales sont des axes de moment nul. Soit G une génératrice rectiligne de la surface S supposée réglée; pour que G fasse partie de la courbe de contact de S avec son enveloppe, il faut et il suffit que les normales à S tout du long de G soient des axes de moment nul. Ces normales forment un paraboloïde et la droite G', conjuguée de G, doit être une génératrice de ce paraboloïde de même système que G. Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée S se raccorde constamment avec une surface réglée (S).

On peut donner à cette condition une autre forme. Soient M un point de la génératrice G et N la trace sur G' du plan normal en M à la droite G; MN est la normale en M à la surface S.

Le plan mené par G et par N est normal en M à la surface. Le plan central est le plan qui est normal en un point situé à l'infini; or, si M s'éloigne à l'infini, il en est de même de N, donc le plan central est le plan mené par G parallèlement à G'.

Le point central est le point où le plan central est tangent; on obtiendra ce point en cherchant sur G un point dont la normale soit perpendiculaire au plan en question. On trouve ainsi le point O, pied de la perpendiculaire commune aux droites G et G'.

Mais rappelons-nous que deux droites conjuguées G, G' ont même perpendiculaire commune avec l'axe Δ du mouvement hélicoïdal (n° 16, p. 47). Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Lorsqu'une surface réglée S *roule en glissant sur une autre surface réglée qu'elle touche en tous les points d'une génératrice rectiligne* G, *le plan central est le plan mené par* G *parallèlement à l'axe* Δ *du mouvement hélicoïdal et le point central est le pied de la perpendiculaire commune à* G *et à cet axe* Δ.

A côté de cette propriété il en est une autre qui la complète et qui a trait à la valeur du paramètre de distribution. Soient O' le pied sur G' de la perpendiculaire commune à G, G' et A le point où cette perpendiculaire coupe Δ à angle droit.

Appelons N′ la projection du point N sur le plan normal à G mené par O, θ l'angle du plan mené par G et N avec le plan mené par G et O′ ; cet angle θ est celui du plan tangent en M avec le plan central. Le triangle OO′N′ donne

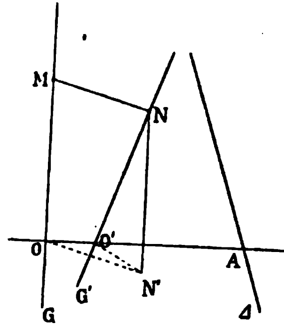


Fig. 62.

$$O'N' = OO'.\text{tang}\,\theta.$$

Appelons α l'angle de G et de G′; le triangle NO′N′ donne

$$N'N = O'N'.\text{cotg}\,\alpha,$$

ou, d'après la formule précédente,

$$N'N = OO'\ \text{cotg}\,\alpha.\text{tang}\,\theta;$$

comme N′N est égal à OM, on voit que

$$k = OO'.\text{cotg}\,\alpha$$

est le paramètre de distribution.

Soient φ, φ' les angles de G, G′ avec Δ; x, x' les distances AO, AO′; on a trouvé (p. 50)

$$x\ \text{tang}\,\varphi' = x'\ \text{tang}\,\varphi = -h,$$

d'autre part

$$\alpha = \varphi' - \varphi, \quad OO' = x' - x.$$

En remplaçant dans l'expression de k et exprimant φ', x' en fonction x, φ, h, on trouve

$$k = x\ \text{cotg}\,\varphi - h,$$

formule qui ne met en jeu que la plus courte distance x entre G et Δ, la tangente de l'angle de ces deux droites et le pas du mouvement hélicoïdal.

Le raisonnement inverse de celui qui a été fait montrera aisément que, réciproquement, si ces trois conditions sont à chaque instant remplies pour une génératrice G de la surface réglée S, cette génératrice fait partie de la courbe de contact de S avec son enveloppe, en sorte que S roule sur une surface réglée. Mais ce mouvement est compliqué d'un glissement oblique à la génératrice G, car si l'on prend un point M sur G, la différence géométrique $\overline{V_a} - \overline{V_r} = \overline{V_e}$ de la vitesse absolue et de la vitesse relative de G est égale à la vitesse

d'entraînement de M. Si cette vitesse d'entraînement avait la direction de G pour tout point M de G, il faudrait que G fût l'axe du mouvement hélicoïdal et nos surfaces réglées seraient les surfaces Δ_m et Δ_f.

Cas des développables. Supposons comme cas particulier une surface développable. Il peut arriver qu'à chaque instant une génératrice rectiligne fasse partie de la courbe de contact de la développable avec son enveloppe; alors cette développable roule continuement sur une autre développable. Cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi.

Soit G la génératrice de contact, il faut que les normales à la développable le long de G soient des axes de moment nul du complexe attaché au mouvement hélicoïdal.

Ces normales forment dans le plan normal le long de G à la surface une famille de droites parallèles. Le pôle de ce plan est donc à l'infini dans la direction de ces droites; par suite, la droite G' conjuguée de la droite G est parallèle à ces normales, ce qui montre que le plan π tangent à la développable le long de G est normal à G'. Cette condition nécessaire est évidemment suffisante, car si elle est remplie, les normales sont toutes des droites de moment nul et la génératrice G est une branche de la courbe de contact de la développable avec son enveloppe. Ainsi :

Pour qu'une développable entraînée dans le mouvement d'un système roule en glissant sur une autre développable, il faut et il suffit qu'à chaque instant du mouvement une génératrice de cette développable admette comme conjuguée dans le complexe linéaire une droite perpendiculaire au plan qui lui est tangent suivant cette génératrice.

Remarques sur l'accélération dans le mouvement général d'un corps solide.

Proposition générale relative à l'accélération d'entraînement. **76.** Je terminerai ce chapitre par quelques remarques générales concernant l'accélération d'entraînement d'un corps solide et qu'il n'était pas possible d'énoncer avant d'avoir étudié le cas du mouvement autour d'un centre fixe.

Nous avons trouvé pour les projections de l'accélération d'entraî-

nement sur des axes liés au corps mobile

$$J_{e,x} = \xi_1 + q'z - r'y + \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$J_{e,y} = \eta_1 + r'x - p'z + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$J_{e,z} = \zeta_1 + p'y - q'x + \frac{\partial H}{\partial z},$$

où l'on a

$$2H = -(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) + (px + qy + rz)^2.$$

Pour l'origine, qui est un point quelconque O du corps mobile, ces projections se réduisent à ξ_1, η_1, ζ_1. Le termes qui s'annulent au point O représentent l'accélération qu'aurait le point x, y, z du corps si celui-ci tournait autour du point O supposé fixe.

On peut donc énoncer ce théorème :

L'accélération d'entraînement de tout point M *d'un corps mobile est la somme géométrique de l'accélération d'entraînement d'un point arbitraire* O *du corps et de l'accélération qu'aurait le point* M *si le corps, étant fixé par le point* O, *tournait autour de ce point en suivant la loi d'orientation à laquelle il obéit réellement dans l'espace.*

Comme le théorème de Rivals nous fournit la loi d'accélération pour la rotation autour d'un point fixe, on voit que le théorème précédent nous fournit la loi de l'accélération dans le cas le plus général.

On peut même observer que si O est le centre des accélérations, ξ_1, η_1, ζ_1 étant alors nuls, l'accélération se réduit à celle que donne le théorème de Rivals. On peut ainsi énoncer ce théorème :

Dans tout corps solide en mouvement, la distribution de l'accélération est la même que si le corps tournait autour du centre des accélérations, en suivant la loi d'orientation à laquelle il obéit réellement dans l'espace (1).

Application à un exemple.

Appliquons ce théorème à un exemple. Prenons, par exemple,

(1) Quand nous disons que le corps suit la loi d'orientation à laquelle il obéit réellement dans l'espace, nous nous figurons un second corps *identique au premier*, mais dont le point O est fixe et qui tourne autour de ce point O, de sorte que ses plans restent à chaque instant parallèles aux plans homologues dans le premier corps mobile.

deux courbes A_m, A_f qui roulent l'une sur l'autre sans glissement, mais en ayant même plan osculateur. Le point de contact A a, dans ce cas, même vitesse V dans les deux courbes, de plus (p. 208) les rayons de courbure sont alors égaux (p. 210),

$$R_f = R_m.$$

Si l'on prend comme trièdre de référence le trièdre formé par la tangente, la normale principale et la bi-normale qui sont communes aux deux courbes, nous avons vu (p. 208) que les formules de la vitesse d'entraînement d'un point M lié à A_m, dans le mouvement par rapport à A_f, se simplifiaient beaucoup et que l'on avait, x, y, z étant les coordonnées du point M,

$$v_x = 0, \quad v_y = V\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_m}\right) z, \quad v_z = -V\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_m}\right) y.$$

Je dis que dans ce mouvement le point de contact A est le centre des accélérations.

Désignons, en effet, par J_a, J_r, J_e, J_c l'accélération absolue, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire du point A, on a

$$\overline{J_a} = \overline{J_r} + \overline{J_e} + \overline{J_c}. \tag{10}$$

On voit d'abord que $\overline{J_c}$ est nulle, car la vitesse relative est tangente aux courbes A_f, A_m en A et qu'il en est de même de l'axe instantané. En second lieu, on a $\overline{J_a} = \overline{J_r}$. En effet, ces deux accélérations sont dans le plan osculateur, et ont comme projection commune sur la tangente $\frac{dV}{dt}$; leurs projections sur la normale principale sont $\frac{V^2}{R_f}$ et $\frac{V^2}{R_m}$, elles sont égales aussi puisque $R_f = R_m$ en grandeur et signe. Mais si $\overline{J_a} = \overline{J_r}$ et $\overline{J_c} = 0$, l'équation (10) donne

$$J_e = 0.$$

Le point A est donc le centre des accélérations.

Il nous suffit, en conséquence, d'appliquer le théorème de Rivals. Nous avons une rotation autour de Ox, qui a pour expression

$$\omega = -V\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_m}\right);$$

il nous faut, en outre, l'accélération angulaire. Concevons que, par un point fixe O (c'est-à-dire lié à la courbe A_f) on mène $\overline{O\Omega}$ égal et parallèle au segment $\overline{\omega}$ porté sur Ox. La vitesse absolue de Ω est l'accélération angulaire. Le segment $O\Omega$ décrit un cône; menons en Ω une perpendiculaire $\Omega\Omega_1$ à $O\Omega$ dans le plan tangent à ce cône; la vitesse du point Ω sera la somme géométrique de deux segments; l'un $\frac{d\omega}{dt}$ porté par $O\Omega$, l'autre porté par $\Omega\Omega_1$ dans le sens du mouvement du point Ω et égal à $\omega.\frac{d\sigma}{dt}$, où $d\sigma$ est l'angle de $\overline{O\Omega}$ avec sa position voisine.

Or, le plan $O\Omega\Omega_1$ est parallèle au plan osculateur xAy aux deux courbes et $\Omega\Omega_1$ est parallèle à la normale principale. L'accélération angulaire est donc un segment contenu dans le plan xAy et dont les projections sur Ax, Ay sont

$$\frac{d\omega}{dt}, \quad \omega \cdot \frac{d\sigma}{dt}.$$

Mais il est clair que $d\sigma$ est l'angle de contingence, si donc R est la valeur commune de R_f et R_m on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{V}{R}.$$

En résumé, les projections de l'accélération angulaire sont

$$\frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{\omega V}{R}, \quad 0,$$

tandis qu'on a pour les projections de la vitesse angulaire

$$\omega, \quad 0, \quad 0.$$

Le théorème de Rivals nous donne alors pour les projections de l'accélération d'entraînement sur les axes du trièdre de référence choisi,

$$J_{e,x} = \frac{\omega V}{R} \cdot z,$$

$$J_{e,y} = \frac{d\omega}{dt} z - \omega^2 y,$$

$$J_{e,z} = \frac{d\omega}{dt} y - \frac{\omega V}{R} x - \omega^2 z.$$

Le lecteur déduira aisément de ces formules la construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point lié à la courbe mobile.

On observera que, pour $\frac{1}{T_f} = 0$, le problème que nous traitons n'est autre que celui du roulement sans glissement d'une développable sur un de ses plans tangents. Les formules précédentes fournissent, pour le cas de ce mouvement, l'accélération d'un point entraîné et donnent les courbures des trajectoires.

Lieu du centre des accélérations quand la loi du temps change.

77. Au n° 55, p. 159, nous avons prouvé que si les éléments géométriques du mouvement d'une figure plane restent les mêmes et si la loi du temps varie, le lieu du centre des accélérations est le cercle des inflexions, c'est-à-dire le lieu des points dont l'accélération normale est nulle, lieu qui est indépendant de la loi du temps. Ce fait est général.

Soit un mouvement $\mathcal{M}$ dans lequel p, q, r, ξ, η, ζ sont les coordonnées du mouvement hélicoïdal tangent et t la variable qui mesure le temps; si la loi du temps vient à changer, on aura un second mouvement où le temps sera représenté par t_1 tandis que les coordonnées du mouvement hélicoïdal seront P, Q, R, Ξ, H, Z, et d'après l'hypothèse faite on aura

$$\frac{P}{p} = \frac{Q}{q} = \frac{R}{r} = \frac{\Xi}{\xi} = \frac{H}{\eta} = \frac{Z}{\zeta} = \frac{dt}{dt_1} = \lambda.$$

Nous désignerons par λ la valeur commune à ces rapports; J_x, J_y, J_z seront les projections de l'accélération d'entraînement dans le mouvement $\mathcal{M}$ et (J_x), (J_y), (J_z) seront les projections analogues dans le second mouvement. Ces projections auront les valeurs suivantes :

$$(J_x) = \Xi_1 + Q'z - R'y + P(Px + Qy + Rz) - (P^2 + Q^2 + R^2)x,$$

où l'on a posé

$$\Xi_1 = \frac{d\Xi}{dt_1} + QZ - RH,$$
$$Q' = \frac{dQ}{dt_1}, \quad R' = \frac{dR}{dt_1}.$$

Si l'on utilise les formules qui donnent P, Q, ... en fonction de

$p, q, \ldots$, savoir : $P = \lambda p$, $Q = \lambda q$, ..., on trouvera facilement

$$(J_x) = \frac{d\lambda}{dt_1} \cdot v_x + \lambda^2 . J_x,$$
$$(J_y) = \frac{d\lambda}{dt_1} \cdot v_y + \lambda^2 . J_y,$$
$$(J_z) = \frac{d\lambda}{dt_1} \; v_z + \lambda^2 . J_z.$$

Dans ces formules on a désigné par v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse d'entraînement dans le mouvement primitif $\mathcal{M}$. Le centre des accélérations dans le mouvement général où la loi du temps est quelconque, est défini par les équations

$$(J_x) = 0, \quad (J_y) = 0, \quad (J_y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{J_x}{v_x} = \frac{J_y}{v_y} = \frac{J_z}{v_z} = -\frac{d\lambda}{\lambda^2 \, dt_1} = \mu.$$

On voit donc que le lieu du centre des accélérations quand la loi du temps vient à changer, est la courbe définie par les équations précédentes. En tous les points de cette courbe l'accélération et la vitesse d'entraînement, propres au mouvement $\mathcal{M}$, sont portés par une même droite; l'accélération normale d'entraînement est donc nulle pour tous les points de cette courbe. Comme, du reste, le mouvement $\mathcal{M}$ est l'un quelconque de ceux que l'on obtient en ne faisant varier que la loi du temps, on peut énoncer ce théorème :

Si dans le mouvement d'un solide la loi du temps vient à changer, les éléments géométriques demeurant invariables, le lieu des points dont l'accélération normale est nulle est une courbe indépendante de la loi du temps, et cette courbe est aussi le lieu du centre des accélérations, lequel est variable avec la loi du temps.

Désignons par μ la valeur du rapport de l'accélération à la vitesse. Les équations ci-dessus donneront pour x, y, z des expressions rationnelles, quotients de deux polynômes du troisième degré, ce qui montrera que le lieu considéré est une cubique gauche.

CHAPITRE X

Des degrés de liberté d'un système mobile. — Mouvements à plusieurs paramètres.

Liberté d'un point.

78. La position d'un point dans l'espace dépend de trois paramètres; on peut traduire ce fait en disant qu'un point de l'espace qui n'est assujetti à aucune condition possède une *liberté de degré égal à 3*. Si l'on assujettit le point à rester sur une surface, son degré de liberté s'abaissera à deux unités. Il s'abaisse à 1 si le point est assujetti à rester sur une ligne.

Liberté d'un segment.

Considérons encore un segment de droite AB de longueur invariable. Sa position dans l'espace dépend de cinq paramètres; si donc, sa longueur étant donnée, il n'est assujetti, en outre, à aucune condition, on pourra dire qu'il est doué d'une liberté de degré 5.

En assujettissant le segment à k conditions, se traduisant chacune par une équation, on abaissera son degré de liberté de 5 à $(5 - k)$.

Cas d'un segment dont le degré de liberté est 2.

Si, par exemple, on introduit 3 conditions, le segment aura une liberté de degré égale à 2. Tous les points de ce segment décrivent alors chacun une surface, sauf cependant le cas exceptionnel où un point particulier serait assujetti à rester fixe ou à décrire une ligne; encore dans ce cas exceptionnel tous les autres points décrivent-ils des surfaces.

Soient A, B, C trois points d'un segment qui décrivent chacun une surface. Soient AA_1, BB_1, CC_1 les normales à ces surfaces. Tout déplacement infiniment petit du segment équivaut à une rotation autour d'un axe Δ (n° 36, p. 112), et les plans menés par Δ et les points A, B, C sont les trois plans normaux aux déplacements de chacun de ces points. Le plan mené par Δ et A, par exemple, contient toutes les

droites issues de A normalement au déplacement du point A; il contient donc la normale AA_1 à la surface lieu du point A. On voit ainsi que l'axe Δ coupe les normales AA_1, BB_1, CC_1. Comme il y a, du reste, une infinité de déplacements du segment ABC, il y a une infinité d'axes Δ et il est évident que ces axes Δ constituent un système Σ de génératrices de la quadrique Q définie par les trois droites AA_1, BB_1, CC_1. Appelons Σ' le second système de génératrices, dont ces trois dernières droites font partie.

Normales aux surfaces trajectoires d'un point du segment.

Si l'on prend un point quelconque M sur le segment ABC, la normale MM_1 à la surface que décrit ce point devra rencontrer tous les axes Δ et par suite faire partie du système Σ'. On a donc ce théorème.

Si un segment possède un degré de liberté égal à 2, les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points constituent à chaque instant un système de génératrices d'une surface de second degré.

Congruence engendrée par le segment.

Quand le segment ABC se déplace, la droite $\mathfrak{D}$ qui le porte engendre une *congruence* (voir n° 14), et réciproquement toute congruence de droites peut être définie comme le lieu des supports d'un segment rigide dont trois points décrivent des surfaces données. Nous pourrons utiliser la proposition précédente pour établir la propriété fondamentale des congruences de droites, à savoir, celle qui vise l'existence des surfaces focales.

Observons que la droite $\mathfrak{D}$, qui porte le segment ABC, fait partie des génératrices du système Σ. Il y a deux plans π', π'' tangents à la quadrique Q et normaux à la droite $\mathfrak{D}$. Le plan π' et le plan π'' contiennent respectivement des génératrices Δ', Δ'' du même système Σ, qui sont deux axes de rotation particuliers, rectangulaires avec la droite $\mathfrak{D}$. Appelons F', F'' les points où la droite $\mathfrak{D}$ est coupée par les plans π', π''. Dans le mouvement qui équivaut à une rotation autour de Δ', le point F' décrit un arc de cercle auquel est tangente la droite $\mathfrak{D}$, en sorte que, dans ce déplacement, cette droite engendre un élément de surface développable. Même remarque pour F'' à l'égard de la rotation autour de l'axe Δ''.

Il y a donc deux manières de déplacer la droite $\mathfrak{D}$, de telle sorte que cette droite engendre un élément de surface développable et les points F', F'', ci-dessus définis, sont respectivement les points de contact de $\mathfrak{D}$ avec les arêtes de ces développables, tandis que les plans

Foyers et plans focaux.

Φ', Φ'', menés par F', F'', respectivement normaux à Δ' et Δ'', en sont les plans osculateurs.

Les points F', F'' ont reçu le nom de *foyers* et les plans Φ', Φ'' celui de *plans focaux* relatifs à la droite $\mathfrak{D}$, dans la congruence engendrée par cette droite.

Surfaces focales.

Lorsque la droite $\mathfrak{D}$ engendre la congruence, les points F', F'' engendrent deux surfaces S', S'' appelées surfaces focales. Ces surfaces sont le lieu des arêtes de deux familles de développables que l'on peut former en déplaçant la droite $\mathfrak{D}$. Il en résulte que cette droite $\mathfrak{D}$ qui est tangente en F', F'' à deux de ces arêtes, est tangente en ces points aux surfaces focales. Déplaçons de plus la droite $\mathfrak{D}$ de sorte qu'elle engendre une développable dont l'arête sera, par exemple, le lieu de son foyer F'; le lieu du second foyer F'' sera une courbe tracée sur S'' et suivant laquelle la développable engendrée sera circonscrite à cette surface; le plan Φ' tangent à cette développable le long de la droite $\mathfrak{D}$ sera donc tangent en F'' à la surface S''. Ainsi le plan focal Φ' est tangent en F'' à la surface focale S'' et de même le plan focal Φ'' est tangent en F' à la surface focale S'.

Congruences de normales.

Si la droite $\mathfrak{D}$ reste, dans ses diverses positions, normale à une surface U, les plans focaux sont les plans des sections principales de cette surface, *ils sont rectangulaires*. On démontre ailleurs la réciproque de cette proposition.

Remarque sur ces congruences

Il nous suffira ici de faire observer que si les plans focaux sont rectangulaires, les droites Δ', Δ'', déjà rectangulaires avec $\mathfrak{D}$, sont aussi rectangulaires entre elles et dès lors *le cône asymptote de la quadrique désignée par* Q *est capable d'un trièdre trirectangle inscrit*. Cette condition est évidemment nécessaire et suffisante pour que les plans focaux soient rectangulaires et, par suite, pour que la droite $\mathfrak{D}$ engendre une congruence de normales.

79. Je bornerai là ces généralités pour les appliquer à un ou deux cas particuliers.

Segment dont trois points décrivent trois plans rectangulaires.

Supposons en premier lieu que trois points A, B, C d'un segment décrivent trois plans α, β, γ formant un trièdre trirectangle. Il est aisé de prouver que tout autre point M du segment décrit un ellipsoïde.

Soient, en effet, a, b, c les distances MA, MB, MC et x, y, z les coordonnées du point M par rapport au trièdre formé par les plans

α, β, γ; désignons aussi par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la droite ABC par rapport à ce trièdre; les équations de cette droite seront

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}=\rho,$$

où ρ est la distance du point (X, Y, Z) au point M (x, y, z). Appliquons ces équations en prenant pour X, Y, Z successivement les points A, B, C nous aurons

$$-\frac{x}{\lambda}=a,\quad -\frac{y}{\mu}=b,\quad -\frac{z}{\nu}=c,$$

et puisque

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,$$

il viendra

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Il est actuellement facile de prouver que, dans ce cas, la droite ABC reste normale à une surface fixe. En effet, les normales AA_1, BB_1, CC_1 aux surfaces trajectoires des points A, B, C sont ici parallèles respectivement aux axes Ox, Oy, Oz qui sont rectangulaires. Le cône directeur de la quadrique Q est donc capable d'un trièdre trirectangle inscrit. En conséquence, d'après la remarque précédente la droite ABC engendre une congruence de normales [1].

Segment dont trois points décrivent des sphères.

Prenons comme second exemple celui d'un segment dont trois points décrivent trois sphères ayant leurs centres A_1, B_1, C_1 sur une même droite.

Ici les normales AA_1, BB_1, CC_1 passent chacune par un point fixe et la quadrique Q contient une génératrice fixe $A_1B_1C_1$. La normale MM_1 à la surface trajectoire d'un point M quelconque de ABC coupe donc $A_1B_1C_1$ en un certain point M_1. De plus, d'après une propriété connue des génératrices rectilignes d'une quadrique, le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, M égale celui des quatre points A_1, B_1, C_1, M_1.

Le rapport anharmonique de ces quatre derniers points est donc constant, et comme A_1, B_1, C_1 sont fixes, il en est de même du

(1) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 235. — Mannheim, *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e série, t. IX.

point M_1. La normale MM_1 passe au point fixe M_1 et, par conséquent, *la surface trajectoire du point* M *est encore une sphère dont le centre* M_1 *est sur la droite* A_1, B_1, C_1 *et correspond homographiquement à la position du point* M *sur la droite* ABC.

Files de sphères.

Nous aurons occasion de revenir sur cette proposition quand nous parlerons des systèmes articulés.

M. Mannheim a fait la remarque que si l'on décrit des points A, B, C, ..., M des sphères α, β, γ, ..., μ de rayons arbitraires, ces sphères restent, dans le déplacement du segment ABC, tangentes respectivement à des sphères α_1, β_1, γ_1, ..., μ_1 des centres A_1, B_1, C_1, ... M_1, en sorte que la *file des sphères* α, β, ..., μ a pour enveloppe la *file des sphères* α_1, β_1, ..., μ_1 et que le mouvement du segment ABC peut être défini par cette condition. M. Mannheim qui, après M. Darboux, a étudié ce mouvement, a utilisé dans plusieurs écrits la considération des files de sphères.

Des divers degrés de liberté d'un corps solide.

80. Nous avons défini la liberté d'un point ou d'un segment dans l'espace. Trois points invariablement liés et non situés sur une même droite constituent un système dont la position suffit pour définir la position d'un corps solide qui lui serait invariablement attaché.

Nous allons donc nous occuper de la liberté d'un corps solide dans l'espace.

Pour connaître la position d'un corps dans l'espace, ou plus exactement par rapport à un trièdre donné T_1, il suffit de connaître les coordonnées de l'origine d'un trièdre T lié invariablement à ce corps et les angles d'Euler qui fixent par rapport au trièdre T_1 l'orientation du trièdre T. *Soit en tout six paramètres.*

Six conditions, se traduisant chacune par une équation, sont donc nécessaires et en général suffisantes pour fixer la position d'un corps.

Si le corps n'est assujetti qu'à cinq conditions, il n'a pas de position déterminée et ses points décrivent tous des courbes trajectoires.

Degré de liberté d'un corps.

On dit alors que le corps a un *degré de liberté* égal à l'unité ou encore qu'il constitue un *système à liaison complète.* Au point de vue des applications ce cas est de beaucoup le plus important, car,

sauf la mécanique céleste, la balistique extérieure, quelques utilisations récentes du gyroscope et quelques mécanismes, c'est le cas d'un degré de liberté égal à 1 qui revient toujours dans les applications.

Les cas de degrés de liberté égaux à 2, 3, 4, 5 ont plutôt un intérêt théorique. Ils se produisent quand le cops n'est assujetti qu'à 4, 3, 2, 1 conditions. Le cas d'un degré de liberté égal à 6 correspond à l'hypothèse d'un corps entièrement libre.

Considérons un corps dont le degré de liberté soit n; continuons à désigner par T_1 le trièdre de référence fixe, et par T un trièdre lié au corps; appelons x, y, z les coordonnées d'un point M par rapport au trièdre T et par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce même point par rapport au trièdre T_1. On aura les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y_1 = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z_1 = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

où a, b, c sont les coordonnées de l'origine du trièdre mobile T par rapport au trièdre T_1 et α, α', α'', ..., γ, γ', γ'' les cosinus des angles des axes des deux trièdres.

Ces neuf quantités sont des fonctions des n paramètres indépendants u_1, u_2, ..., u_n, dont la connaissance permet de construire la position du corps.

Imprimons au corps un mouvement déterminé, mais quelconque; cela revient à prendre pour u_1, u_2, ..., u_n des fonctions déterminées, mais arbitraires du temps.

Les projections de la vitesse absolue du point M, effectuées sur les axes du trièdre mobile, auront, en supposant pour plus de généralité le point M mobile également par rapport au corps, les expressions suivantes :

$$v_x = \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt}.$$

Rappelons ici les formules du n° 26 qui servent à définir p, q, r, ξ, η, ζ.

$$
\begin{aligned}
\xi &= \alpha \frac{da}{dt} + \beta \frac{db}{dt} + \gamma \frac{dc}{dt},\\
\eta &= \alpha' \frac{da}{dt} + \beta' \frac{db}{dt} + \gamma' \frac{dc}{dt},\\
\zeta &= \alpha'' \frac{da}{dt} + \beta'' \frac{db}{dt} + \gamma'' \frac{dc}{dt},\\
p &= \left(\alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt}\right) = -\left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt}\right),\\
q &= \left(\alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt}\right) = -\left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt}\right),\\
r &= \left(\alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt}\right) = -\left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right).
\end{aligned}
$$

Ici les quantités a, b, c, α, β, ..., β'', γ'' sont des fonctions des paramètres u_1, u_2, ..., u_n; lesquels à leur tour ont été pris égaux à des fonctions du temps; nous poserons

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi_i &= \alpha \frac{\partial a}{\partial u_i} + \beta \frac{\partial b}{\partial u_i} + \gamma \frac{\partial c}{\partial u_i},\\
\eta_i &= \alpha' \frac{\partial a}{\partial u_i} + \beta' \frac{\partial b}{\partial u_i} + \gamma' \frac{\partial c}{\partial u_i},\\
\zeta_i &= \alpha'' \frac{\partial a}{\partial u_i} + \beta'' \frac{\partial b}{\partial u_i} + \gamma'' \frac{\partial c}{\partial u_i},\\
p_i &= \left(\alpha'' \frac{\partial \alpha'}{\partial u_i} + \beta'' \frac{\partial \beta'}{\partial u_i} + \gamma'' \frac{\partial \gamma'}{\partial u_i}\right) = -\left(\alpha' \frac{\partial \alpha''}{\partial u_i} + \beta' \frac{\partial \beta''}{\partial u_i} + \gamma' \frac{\partial \gamma''}{\partial u_i}\right),\\
q_i &= \left(\alpha \frac{\partial \alpha''}{\partial u_i} + \beta \frac{\partial \beta''}{\partial u_i} + \gamma \frac{\partial \gamma''}{\partial u_i}\right) = -\left(\alpha'' \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} + \beta'' \frac{\partial \beta}{\partial u_i} + \gamma'' \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}\right),\\
r_i &= \left(\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial u_i} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}\right) = -\left(\alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial u_i} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial u_i} + \gamma \frac{\partial \gamma'}{\partial u_i}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

et nous aurons alors

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \sum \xi_i \frac{du_i}{dt}, & \eta &= \sum \eta_i \frac{du_i}{dt}, & \zeta &= \sum \zeta_i \frac{du_i}{dt},\\
p &= \sum p_i \frac{du_i}{dt}, & q &= \sum q_i \frac{du_i}{dt}, & r &= \sum r_i \frac{du_i}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules qui donnent la vitesse absolue du point M ou plutôt ses projections sur les axes du trièdre T seront donc

$$(4) \quad \begin{cases} v_x = \sum (\xi_i + q_i z - r_i y) \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y = \sum (\eta_i + r_i x - p_i z) \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z = \sum (\zeta_i + p_i y - q_i x) \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Équations aux différentielles totales.

81. Nous avons appelé n le nombre des paramètres u; il y a $6n$ quantités p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i et qui sont des fonctions des paramètres u, *mais non pas des fonctions quelconques*.

Considérons, en effet, un point M lié invariablement au trièdre fixe T_1. Quel que soit le déplacement imprimé au trièdre T, la vitesse absolue de M est nulle; il en est donc de même des projections de cette vitesse sur les axes du trièdre T et, par conséquent, les coordonnées x, y, z du point M, prises par rapport au trièdre T, doivent vérifier le système d'équations aux différentielles totales

$$(5) \quad \begin{cases} dx + \sum (\xi_i + q_i z - r_i y)\, du_i = 0, \\ dy + \sum (\eta_i + r_i x - p_i z)\, du_i = 0, \\ dz + \sum (\zeta_i + p_i y - q_i x)\, du_i = 0. \end{cases}$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées absolues, c'est-à-dire prises par rapport au trièdre T_1, de ce même point M. Ces coordonnées x_1, y_1, z_1 sont trois constantes, en sorte que le système d'équations (5) admet un système x, y, z de solutions dépendant de *trois* constantes arbitraires.

Si l'on écrit les conditions d'intégrabilité, on obtient des relations entre x, y, z et le paramètres u. *Ces relations doivent se réduire à des identités,* sans quoi les expressions générales de x, y, z ne pourraient dépendre de trois constantes arbitraires.

On sait que l'on appelle système *complètement intégrable* un système d'équations aux différentielles totales dans lequel toutes les conditions d'intégrabilité se trouvent vérifiées identiquement [1].

D'après cela le système (5) doit être complètement intégrable.

Réciproque.

Supposons réciproquement que les quantités p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i

---

[1] Voir Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, p. 70.

soient des fonctions des u telles que le système (5) soit complètement intégrable.

Les expressions générales de x, y, z seront des fonctions des u, contenant trois constantes arbitraires. On peut trouver un mouvement continu dépendant des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et dans lequel la distribution des vitesses soit donnée par les formules (4).

Nous procéderons comme au nº 40. Soit x_0, y_0, z_0 un système particulier de solutions du système (5) et posons

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z;$$

les nouvelles fonctions X, Y, Z vérifient les équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &dX + \sum (q_i Z - r_i Y) = 0, \\ &dY + \sum (r_i X - p_i Z) = 0, \\ &dZ + \sum (p_i Y - q_i X) = 0 \end{aligned} \right.$$

qui constituent encore un système complètement intégrable. Par un raisonnement en tous points semblable à celui du nº 40, on verra qu'on peut toujours trouver trois systèmes de solutions (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de ce système, qui vérifient les relations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \qquad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \quad \alpha'\alpha''' + \beta'\beta''' + \gamma'\gamma''' = 0;$$

et les expressions suivantes de x, y, z,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \\ y &= y_0 + \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \\ z &= z_0 + \alpha'' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \end{aligned} \right.$$

où x_1, y_1, z_1 seront trois constantes vérifieront le système (5).

Envisageons alors un trièdre T_1 dont x_0, y_0, z_0 seront les coordonnées de l'origine et $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des axes par rapport au trièdre de référence T. Les formules (7) montrent que x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées par rapport à T_1 du point M dont x, y, z sont les coordonnées par rapport au trièdre T. Ces formules définissent donc un mouvement continu à n paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du trièdre T par rapport au trièdre T_1.

On peut vérifier comme il suit que la distribution des vitesses dans

ce mouvement est fournie par les fonctions p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i qui figurent dans les équations (5).

Désignons par p'_i, q'_i, r'_i, ξ'_i, η'_i, ζ'_i les fonctions qui interviennent dans la distribution des vitesses dans le mouvement continu défini par les équations (7). La vitesse de tout point M (x, y, z) aura comme projections

$$v_x = \sum (\xi'_i + q'_i z - r'_i y) \frac{du_i}{dt} + \frac{dx}{dt},$$
$$v_y = \sum (\eta'_i + r'_i x - p'_i z) \frac{du_i}{dt} + \frac{dy}{dt},$$
$$v_z = \sum (\zeta'_i + p'_i y - q'_i x) \frac{du_i}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Les points M liés au trièdre T_1 vérifient les équations

$$(8) \qquad v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0;$$

mais ces points s'obtiennent en prenant x_1, y_1, z_1 constants dans les formules (7); leurs coordonnées relatives vérifient donc le système (5); en comparant aux équations (8) nous obtiendrons par soustraction

$$\sum \left(\xi'_i - \xi_i + \overline{q'_i - q_i}.z - \overline{r'_i - r_i}.y\right) du_i = 0,$$
$$\sum \left(\eta'_i - \eta_i + \overline{r'_i - r_i}.x - \overline{p'_i - p_i}.z\right) du_i = 0,$$
$$\sum \left(\zeta'_i - \zeta_i + \overline{p'_i - p_i}.y - \overline{q'_i - q_i}.x\right) du_i = 0.$$

Ceci doit avoir lieu indépendamment des du_i, et pour tous les points de l'espace; on a donc

$$\xi'_i = \xi_i, \quad \eta'_i = \eta_i, \quad \zeta'_i = \zeta_i,$$
$$p'_i = p_i, \quad q'_i = q_i, \quad r'_i = r_i,$$

ce qui démontre la proposition.

La remarque qui fait l'objet du n° 39 s'applique intégralement au cas actuel; c'est-à-dire que les quantités ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i étant données de sorte que le système (5) soit complètement intégrable, la détermination du trièdre fixe T_1 auquel se trouve rapporté le mouvement comporte seulement cela d'arbitraire qu'on peut substituer à T_1 tout autre trièdre qui lui serait invariablement lié.

Conditions d'intégrabilité. Nous avons vu par ce qui précède que les conditions d'intégrabilité du système (5) doivent être satisfaites identiquement, sans qu'il en résulte aucune relation finie entre les variables $x, y, z, u_1, u_2, \ldots, u_n$. Ces conditions d'intégrabilité sont aisées à écrire; il faut avoir

$$-\frac{\partial x}{\partial u_i} = \xi_i + q_i z - r_i y,$$
$$-\frac{\partial y}{d u_i} = \eta_i + r_i x - p_i z,$$
$$-\frac{\partial z}{\partial u_i} = \zeta_i + p_i y - q_i x,$$

donc

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_j} = \frac{\partial(\xi_i + q_i z - r_i y)}{\partial u_j} = \frac{\partial(\xi_j + q_j z - r_j y)}{\partial u_i},$$

ou

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \frac{\partial q_i}{\partial u_j} z - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} y + q_i \frac{\partial z}{\partial u_j} - r_i \frac{\partial y}{\partial u_j}$$
$$= \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} + \frac{\partial q_j}{\partial u_i} z - \frac{\partial r_j}{\partial u_i} y + q_j \frac{\partial z}{\partial u_i} - r_j \frac{\partial y}{\partial u_i}.$$

En tenant compte des expressions de $\frac{\partial z}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial z}{\partial u_j}, \frac{\partial y}{\partial u_j}$, on trouvera

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \frac{\partial q_i}{\partial u_j} z - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} y - q_i(\zeta_j + p_j y - q_j x)$$
$$+ r_i(\eta_j + r_j x - p_j z) = \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} + \frac{\partial q_j}{\partial u_i} z - \frac{\partial r_j}{\partial u_i} y$$
$$- q_j(\zeta_i + p_i y - q_i x) + r_j(\eta_i + r_i x - p_i z),$$

ce qui, ordonné en x, y, z, s'écrit

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} + q_j\zeta_i - q_i\zeta_j + r_i\eta_j - r_j\eta_i$$
$$+ \left[\frac{\partial r_j}{\partial u_i} - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} + p_i q_j - p_j q_i\right] y$$
$$- \left[\frac{\partial q_j}{\partial u_i} - \frac{\partial q_i}{\partial u_j} + r_i p_j - r_j p_i\right] z = 0.$$

On obtiendra deux autres équations analogues en égalant deux expressions différentes de $\frac{\partial^2 y}{\partial u_i\,\partial u_j}, \frac{\partial^2 z}{\partial u_i\,\partial u_j}$. Comme aucune rela-

tion finie ne doit exister entre x, y, z et les u, ces équations doivent avoir lieu quels que soient x, y, z ; il vient ainsi

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} + q_j \zeta_i - q_i \zeta_j + r_i \eta_j - r_j \eta_i = 0,\\
&\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} + r_j \xi_i - r_i \xi_j + p_i \zeta_j - p_j \zeta_i = 0,\\
&\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial u_i} + p_j \eta_i - p_i \eta_j + q_i \xi_j - q_j \xi_i = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_j}{\partial u_i} - \frac{\partial p_i}{\partial u_j} + q_i r_j - q_j r_i = 0,\\
&\frac{\partial q_j}{\partial u_i} - \frac{\partial q_i}{\partial u_j} + r_i p_j - r_j p_i = 0,\\
&\frac{\partial r_j}{\partial u_i} - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} + p_i q_j - p_j q_i = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les conditions que doivent vérifier les $6n$ fonctions p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i ; ces conditions sont au nombre de

$$6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 3n(n-1).$$

Il y a lieu de remarquer la signification des quantités ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i qui figurent dans ces formules.

Si l'on suppose que le paramètre u_i varie seul avec une vitesse $\frac{du_i}{dt}$ égale à l'unité, ces six quantités sont précisément les coordonnées du mouvement hélicoïdal tangent qui correspond à ce mouvement particulier. Les quantités ξ_i η_i, ζ_i représentent notamment les projections, sur les axes du trièdre mobile, de la vitesse d'entraînement de l'origine de ce trièdre. On observera qu'au fond cette origine est un point quelconque lié invariablement au corps mobile, et que les quantités p_i, q_i, r_i restent les mêmes si l'on change le trièdre T en un autre qui lui serait parallèle et invariablement lié. Dans les équations (9) on peut donc mettre, au lieu de ξ_i, η_i, ζ_i, ξ_j, η_j, ζ_j, les projections des vitesses de n'importe quel point lié invariablement au corps; ces équations devront être encore vérifiées. Cette remarque élémentaire est une source de simplification dans certains calculs et a été notamment utilisée par M. Darboux dans ses Leçons sur la théorie des surfaces.

82. La forme linéaire de v_x, v_y, v_z en $\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \ldots, \frac{du_n}{dt}$ conduit à quelques propriétés que nous allons faire connaître.

Si l'on effectue un déplacement dans lequel u_i varie seul, les projections de la vitesse d'entraînement auront pour expressions

$$(\xi_i + q_i z - r_i y)\frac{du_i}{dt},$$
$$(\eta_i + r_i x - p_i z)\frac{du_i}{dt},$$
$$(\zeta_i + p_i y - q_i x)\frac{du_i}{dt},$$

les sommes des quantités analogues représentent les projections de la vitesse dans l'hypothèse d'un déplacement quelconque; de là ce théorème :

Dans tout déplacement d'un corps dont la liberté est supérieure à 1, la vitesse d'entraînement est la somme géométrique des vitesses que l'on obtient en faisant varier séparément et successivement chacun des paramètres indépendants.

Déplacements réductibles des rotations.

Proposons-nous encore de rechercher les lois de mouvement d'un corps dont la liberté est n et qui soient telles que le mouvement hélicoïdal tangent se réduise constamment à une rotation.

Il faudra, conformément aux résultats du numéro 33, page 105, que l'invariant

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0$$

soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum p_i\frac{du_i}{dt}\cdot\sum \xi_i\frac{du_i}{dt} + \sum q_i\frac{du_i}{dt}\cdot\sum \eta_i\frac{du_i}{dt} \\ &\qquad + \sum r_i\frac{du_i}{dt}\cdot\sum \zeta_i\frac{du_i}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\mathcal{H}_{ii} = p_i\xi_i + q_i\eta_i + r_i\zeta_i,$$
$$2\mathcal{H}_{ij} = p_i\xi_j + p_j\xi_i + q_i\eta_j + q_j\eta_i + r_i\zeta_j + r_j\zeta_i;$$

l'équation (11) devient, après multiplication par dt^2,

$$(12)\qquad \sum_{i,j} \mathcal{H}_{ij}\,du_i\,du_j = 0.$$

Les déplacements du corps qui admettent une rotation tangente sont donc ceux pour lesquels les rapports du_i, du_j vérifient l'équation précédente (12).

Les coefficients $\mathcal{H}_{i,j}$ qui figurent dans cette équation ont une signification immédiate; $\mathcal{H}_{i,i}$ est l'auto-moment du système de segments S_i qui représente les rotations quand on ne fait varier que u_i avec une vitesse $\frac{du_i}{dt} = 1$ égale à l'unité; et $\mathcal{H}_{i,j}$ est le moment des deux systèmes S_i, S_j.

Observons que si l'on imprime au corps un mouvement continu tel que l'équation (12) soit constamment vérifiée, le mouvement admettra à chaque instant une rotation tangente; ce mouvement continu résultera alors, comme nous savons, du roulement d'une surface réglée sur une autre surface réglée applicable sur elle.

Mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions.

83. Nous allons indiquer l'application de ces principes au mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions et dépendant, en conséquence, de deux paramètres. Les points du corps décrivent alors chacun une surface et le problème se pose de construire la normale à chaque *surface trajectoire*. Un beau théorème dû à Schöneman et retrouvé par M. Mannheim, donne la solution de ce problème.

Formons, dans l'hypothèse de deux paramètres, l'équation qui définit les déplacements équivalents à des rotations, nous aurons

$$(13) \qquad \mathcal{H}_{11}\, du_1^2 + 2\,\mathcal{H}_{12}\, du_1\, du_2 + \mathcal{H}_{22}\, du_2^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour le rapport $\frac{du_2}{du_1}$; on peut, dès lors, conclure ce théorème :

Quand un corps est assujetti à quatre conditions, parmi tous les déplacements de ce corps autour de l'une quelconque de ses positions, il y en a deux qui se réduisent à des rotations.

On observera que $\mathcal{H}_{11}$, $\mathcal{H}_{12}$, $\mathcal{H}_{22}$ sont des fonctions de u_1, u_2; si donc on fait un changement de variables portant sur les paramètres

u_1, u_2, on pourra prendre comme nouveaux paramètres les intégrales de cette équation du second degré en du_1 et du_2, en sorte que les deux déplacements qui se réduisent à une rotation infiniment petite seront définis, l'un par l'équation $du_1 = 0$, l'autre par l'équation $du_2 = 0$.

Nous avons remarqué, du reste, au nº 82 que tout déplacement d'un corps dont la position dépend de n paramètres résulte des déplacements que l'on obtient en faisant varier successivement ces paramètres; donc, dans le cas actuel, comme ces déplacements partiels consistent chacun en une rotation, on pourra énoncer ce théorème :

Tout déplacement infiniment petit d'un corps dont la position dépend de deux paramètres résulte de deux rotations instantanées autour de deux axes Δ_1, Δ_2.

Théorème de MM. Schönemann et Mannheim.

Considérons un point M du corps; dans la rotation autour de Δ_1, le point M décrit un petit arc MM′ normal au plan mené par M et par Δ_1. De même le plan mené par M et par Δ_2 est normal en M au petit élément MM″ décrit par le point M quand le corps subit une rotation élémentaire autour de Δ_2. La droite MN, intersection de ces deux plans, est normale à la fois aux éléments MM′, MM″, c'est donc la normale à la surface que le point M du corps est assujetti à décrire. De là ce théorème :

Quand un corps est assujetti à quatre conditions, les normales aux surfaces trajectoires de ses points rencontrent toutes deux droites Δ_1, Δ_2 *qui ne dépendent que de la position actuelle du corps.*

Ce théorème, trouvé d'abord en 1855 par Schöneman, a été donné en France en 1866 par M. Mannheim, qui en a fait la base de plusieurs écrits insérés dans divers journaux scientifiques et notamment dans le *Recueil des savants étrangers*.

Autre démonstration du théorème précédent.

On peut donner de ce théorème une démonstration différente qui met en évidence le rôle des complexes et des congruences linéaires dans cette question.

Reprenons l'hypothèse générale où les deux paramètres indépendants u_1, u_2 sont quelconques. Si l'on prend pour u_1, u_2 deux fonctions du temps, on obtient un mouvement dont les éléments du

mouvement hélicoïdal tangent seront

$$p = p_1 \frac{du_1}{dt} + p_2 \frac{du_2}{dt}, \quad q = q_1 \frac{du_1}{dt} + q_2 \frac{du_2}{dt}, \quad r = r_1 \frac{du_1}{dt} + r_2 \frac{du_2}{dt},$$
$$\xi = \xi_1 \frac{du_1}{dt} + \xi_2 \frac{du_2}{dt}, \quad \eta = \eta_1 \frac{du_1}{dt} + \eta_2 \frac{du_2}{dt}, \quad \zeta = \zeta_1 \frac{du_1}{dt} + \zeta_2 \frac{du_2}{dt}.$$

Si l'on ne fait venir que u_1, on obtiendra un mouvement hélicoïdal tangent auquel se trouve attaché un certain complexe linéaire C_1; si l'on ne fait varier que u_2, on aura un autre mouvement hélicoïdal tangent auquel se trouve attaché un second complexe linéaire C_2.

Considérons un point M quelconque, la normale MN à la surface qu'il décrit appartient au complexe C_1, car cette droite est normale à la trajectoire que décrit le point M quand u_1 varie seul; pour une raison analogue, MN fait aussi partie du complexe C_2. On reconnaît ainsi que :

Lorsqu'un corps est assujetti à quatre conditions, les normales aux surfaces trajectoires des points de ce corps constituent à chaque instant l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires.

Congruence linéaire.

On appelle *congruence linéaire* l'ensemble de ces droites. Or, on démontre aisément que l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires est constituée par les droites qui coupent deux droites fixes Δ_1, Δ_2, lesquelles sont conjuguées à la fois dans ces deux complexes.

Nous retrouvons donc ainsi, mais avec des compléments géométriques qui peuvent avoir leur utilité, la proposition de MM. Schönemann et Mannheim.

Quant à l'existence de ces deux droites Δ_1, Δ_2 que doivent couper toutes les droites communes aux deux complexes linéaires, on l'établit ainsi :

Les complexes C_1, C_2 ont pour équations respectivement (voir le n° 17)

$$(14) \quad \begin{cases} p_1 L + q_1 M + r_1 N + \xi_1 X + \eta_1 Y + \zeta_1 Z = 0, \\ p_2 L + q_2 M + r_2 N + \xi_2 X + \eta_2 Y + \zeta_2 Z = 0; \end{cases}$$

l'équation suivante, où ρ est arbitraire,

$$(15) \quad \begin{cases} (p_2 + \rho p_1) L + (q_2 + \rho q_1) M + (r_2 + \rho r_1) N \\ \qquad + (\xi_2 + \rho \xi_1) X + (\eta_2 + \rho \eta_1) Y + (\zeta_2 + \rho \zeta_1) Z = 0, \end{cases}$$

définit un complexe linéaire qui contient toutes les droites communes aux deux premiers.

Complexe spécial.

Cherchons à déterminer ρ de sorte que ce complexe soit *spécial*, c'est-à-dire que l'invariant

$$(16)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(p_2 + \rho p_1)(\xi_2 + \rho\xi_1) + (q_2 + \rho q_1)(\eta_2 + \rho\eta_1) \\ &\qquad + (r^2 + \rho r_1)(\zeta_2 + \rho\zeta_1) = 0 \end{aligned} \right.$$

soit nul. Dans ce cas, les quantités

$$p_2 + \rho p_1, \quad q_2 + \rho q_1, \quad r_2 + \rho r_1, \quad \xi_2 + \rho\xi_1, \quad \eta_2 + \rho\eta_1, \quad \zeta_2 + \rho\zeta_1$$

sont les coordonnées d'un segment (n° 11) et l'équation (15) exprime que la droite X, Y, Z, L, M, N, coupe la droite Δ qui porte ce segment. Un complexe spécial est ainsi formé de l'ensemble des droites qui coupent une droite donnée Δ. Maintenant l'équation (16) s'écrit

$$(17)\qquad \mathcal{H}_{11}\rho^2 + 2\mathcal{H}_{12}\rho + \mathcal{H}_{22} = 0,$$

elle donne pour ρ deux valeurs, ρ', ρ''; à chacune de ces valeurs correspond une droite Δ, ce qui fait deux droites Δ_1, Δ_2 que doivent rencontrer les droites communes aux complexes proposés.

Ajoutons que si dans l'équation (15) on met ρ', puis ρ'' au lieu de ρ, on obtient deux équations qui, tant que $\rho'' - \rho'$ n'est pas nul, forment un système équivalent au système (14).

Il en résulte que, réciproquement, toutes les droites qui coupent à la fois Δ_1, Δ_2 sont communes à nos deux complexes. On en conclura immédiatement que Δ_1 et Δ_2 sont un couple de droites conjuguées communes à ces deux complexes C_1, C_2. On voit même que quel que soit ρ, les droites Δ_1, Δ_2 forment un couple de droites conjuguées par rapport au complexe représenté par l'équation (15).

Contact d'une surface avec son enveloppe.

Considérons actuellement une surface S liée au corps, on prouve par un raisonnement analogue à celui du n° 46, que pour avoir le point (ou les points) de contact de la surface S avec son enveloppe, on doit chercher sur S les points dont la normale coupe les deux droites Δ_1, Δ_2.

Par exemple, si S est un plan, ce plan touche son enveloppe au point de rencontre des projections sur S des droites Δ_1, Δ_2.

Foyers d'une droite d'une congruence.

On peut de même se proposer de rechercher les foyers d'une droite liée au corps. Cette droite engendre, en effet, une congruence puisqu'elle dépend de deux paramètres.

Soient X, Y, Z, L, M, N les coordonnées de cette droite *dans le trièdre mobile*.

Ces coordonnées sont des constantes.

Le lecteur prouvera aisément que les foyers se trouvent à l'intersection de la droite considérée avec la quadrique représentée par l'équation

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 + q_1 z - r_1 y, & \xi_2 + q_2 z - r_2 y, & X \\ \eta_1 + r_1 x - p_1 z, & \eta_2 + r_2 x - p_2 z, & Y \\ \zeta_1 + p_1 y - q_1 x, & \zeta_2 + p_2 y - q_2 x, & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Du reste, si l'on voulait introduire ici les considérations du n° 78, page 220, il suffirait d'observer que les normales aux surfaces trajectoires des divers points de la droite proposée doivent couper, outre cette droite $\mathfrak{D}$, les axes de rotation Δ_1, Δ_2, en sorte que la quadrique que nous avons appelée Q est ici définie par les droites $\mathfrak{D}$, Δ_1 et Δ_2.

84. La géométrie des surfaces et des congruences offre un champ immense aux applications des mouvements à deux paramètres. Les formules de Codazzi, par exemple, rentrent dans les conditions d'intégrabilité (9) et (10).

Théorème de Ribaucour. Je me bornerai, pour terminer, à démontrer un beau théorème dû à Albert Ribaucour et qui rattache le problème de la déformation des surfaces à l'étude de certains mouvements.

Les raisonnements qui nous ont servi à établir le théorème de Schönemann et Mannheim tombent en défaut si l'équation (13) ou, ce qui revient au même, l'équation (17) a ses racines égales, c'est-à-dire si

$$(\mathcal{H}_{12})^2 - \mathcal{H}_{11}.\mathcal{H}_{22} = 0.$$

C'est le cas limite où les droites Δ_1, Δ_2 viennent se confondre. Il ne diffère pas essentiellement du cas général.

Il en est tout autrement si les équations (13) ou (17) sont des identités, c'est-à-dire si

$$\mathcal{H}_{11} = 0, \quad \mathcal{H}_{12} = 0, \quad \mathcal{H}_{22} = 0.$$

Dans ce cas, les mouvements hélicoïdaux tangents se réduisent toujours à une simple rotation, et cela, quelle que soit la loi du mouvement.

Les équations $\mathcal{H}_{11} = 0$, $\mathcal{H}_{22} = 0$ expriment que les déplacements

dans lesquels u_1 puis u_2 varient seuls sont des rotations Ω_1, Ω_2 ; appelons Δ_1, Δ_2 les axes de ces rotations, dont $(p_1, q_1, r_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ $(p_2, q_2, r_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ sont les coordonnées. L'équation $\mathcal{H}_{12} = 0$ exprime alors que ces axes Δ_1 et Δ_2 se coupent.

Nous appellerons I leur point de rencontre et π leur plan commun.

Maintenant, les expressions

$$\begin{array}{lll} p_1 u'_1 + p_2 u'_2, & q_1 u'_1 + q_2 u'_2, & r_1 u'_1 + r_2 u'_2, \\ \xi_1 u'_1 + \xi_2 u'_2, & \eta_1 u'_1 + \eta_2 u'_2, & \zeta_1 u'_1 + \zeta_2 u'_2, \end{array}$$

où l'on a posé pour abréger $u'_1 = \frac{du_1}{dt}$, $u'_2 = \frac{du_2}{dt}$, sont, quels que soient u'_1, u'_2, les coordonnées d'un segment Ω porté par un axe Δ, et ce segment Ω représente une rotation à laquelle est réductible le mouvement tangent quel que soit le rapport $\frac{u'_1}{u'_2}$. Or, il résulte des expressions mêmes de ses coordonnées que le segment ω est la résultante de deux segments portés par les axes Δ_1 et Δ_2 et qui sont égaux l'un au produit du segment Ω_1 par le nombre u'_1, l'autre au produit du segment Ω_2 par le nombre u'_2. Le segment Ω est donc issu du point I dans le plan π. Quand le rapport $\frac{u'_1}{u'_2}$ prendra toutes les valeurs possibles, l'axe Δ décrira évidemment le faisceau plan (I, π).

On peut même ajouter, remarque qui a son utilité, qu'en vertu du principe de correspondance, le rapport anharmonique de quatre axes Δ sera égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de $\frac{u'_1}{u'_2}$ auxquelles ils correspondent.

Considérons actuellement le point I; il dépend des deux paramètres u_1, u_2 et décrit dans l'espace une certaine surface I_f; il décrit aussi dans le corps une surface I_m qui sera le lieu des points du corps avec lesquels le point I peut venir coïncider.

Le théorème de Ribaucour consiste en ce que *les surfaces* I_f *et* I_m *sont tangentes l'une à l'autre au point* I, *le plan* π *est leur plan tangent commun et enfin* ELLES SONT APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE.

Supposons, en effet, qu'on prenne pour u_1, u_2 des fonctions quelconques du temps; le point I va décrire sur I_m et sur I_f deux courbes C_m, C_f, C_m sera sa trajectoire relative et C_f sa trajectoire absolue. La vitesse d'entraînement du point I étant nulle, puisque, quel que soit

le déplacement, il est constamment sur l'axe instantané de rotation, il en résulte que sa vitesse absolue se confond avec sa vitesse relative. Les courbes C_m et C_f sont donc tangentes et roulent sans glisser l'une sur l'autre. Ceci étant vrai quelle que soit la courbe C_m que l'on obligera le point I à décrire sur I_m, on peut en conclure déjà que les deux surfaces I_f, I_m se touchent au point I.

Comme de plus, puisqu'il n'y a pas glissement, à un arc de courbe C_m tracée sur I_m correspond un arc égal de la courbe C_f tracée sur I_f, on voit que la correspondance ponctuelle qui existe entre les surfaces I_f, I_m est de telle nature que les arcs correspondants sont égaux.

Les deux surfaces I_f, I_m sont ainsi *applicables* l'une sur l'autre.

Soient x, y, z les coordonnées du point de rencontre I des axes des deux rotations p_1, q_1, r_1, ξ_1, η_1, ζ_1 et p_2, q_2, r_2, ξ_2, η_2, ζ_2, on a

$$\xi_1 = -q_1 z + r_1 y, \quad \eta_1 = -r_1 x + p_1 z, \quad \zeta_1 = -p_1 y + q_1 x,$$
$$\xi_2 = -q_2 z + r_2 y, \quad \eta_2 = -r_2 x + p_2 z, \quad \zeta_2 = -p_2 y + q_2 x.$$

Si nous écrivons alors les conditions d'intégrabilité nous trouverons

$$q_1 \frac{\partial z}{\partial u_2} - r_1 \frac{\partial y}{\partial u_2} = q_2 \frac{\partial z}{\partial u_1} - r_2 \frac{\partial y}{\partial u_1},$$
$$r_1 \frac{\partial x}{\partial u_2} - p_1 \frac{\partial z}{\partial u_2} = r_2 \frac{\partial x}{\partial u_1} - p_2 \frac{\partial z}{\partial u_1},$$
$$p_1 \frac{\partial y}{\partial u^2} - q_1 \frac{\partial x}{\partial u_2} = p_2 \frac{\partial y}{\partial u_1} - q_2 \frac{\partial y}{\partial u_2}.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u_1}$, $\frac{\partial y}{\partial u_1}$, $\frac{\partial z}{\partial u_1}$, ajoutons et nous trouverons

$$\begin{vmatrix} p_1, & \frac{\partial x}{\partial u_1}, & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ q_1, & \frac{\partial y}{\partial u_1}, & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ r_1, & \frac{\partial z}{\partial u_1}, & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0,$$

en multipliant au contraire par $\frac{\partial x}{\partial u_2}$, $\frac{\partial y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial z}{\partial u_2}$ et ajoutant encore

$$\begin{vmatrix} p_2, & \dfrac{\partial x}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \\ q_2, & \dfrac{\partial y}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} \\ r_2, & \dfrac{\partial z}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux équations expriment que le plan des deux axes est précisément le plan tangent à la surface I_m au point I.

Le théorème de M. Ribaucour ramène ainsi la question des surfaces applicables sur une surface donnée à l'étude de certains mouvements de cette surface. Le cas particulier où l'on fait rouler une surface sur sa symétrique donne lieu à des propositions analogues à celles que nous avons déjà rencontrées pour les courbes. Il est bon de dire ici que ce cas joue un rôle à part et qu'il semble échapper à la théorie qui fait l'objet du cas général.

Mouvements à trois paramètres.

85. Les mouvements à trois paramètres ont été beaucoup moins étudiés que les mouvements précédents.

Un corps qui a un point fixe et un corps dont un plan peut librement glisser sur un autre plan sont deux exemples de mouvements à trois paramètres. Dans ces deux cas une circonstance remarquable se produit : quelle que soit la loi de mouvement que l'on impose au corps, à chaque instant le mouvement hélicoïdal tangent se réduit à une rotation. Autrement dit, tout déplacement infiniment petit équivaut à une rotation.

L'équation

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_{11} du_1^2 + \mathcal{H}_{22} du_2^2 + \mathcal{H}_{33} du_3^2 \\ + 2\,\mathcal{H}_{12} du_1 du_2 + 2\,\mathcal{H}_{13} du_1 du_3 + 2\,\mathcal{H}_{23} du_2 du_3 = 0 \end{gathered}$$

qui définit les déplacements infiniment petits réductibles à des rotations est, dans ces deux cas, une identité, ainsi que cela se produit avec deux variables à propos du théorème de Ribaucour.

Mouvements à trois paramètres réductibles à des rotations successives.

Il y a quelque intérêt à rechercher si ces deux mouvements à trois paramètres sont bien les seuls qui présentent cette circonstance.

Observons d'abord que l'on a par hypothèse ces six équations

$$\mathcal{H}_{11} = 0, \quad \mathcal{H}_{22} = 0, \quad \mathcal{H}_{33} = 0,$$
$$\mathcal{H}_{12} = 0, \quad \mathcal{H}_{13} = 0, \quad \mathcal{H}_{23} = 0.$$

Les trois premières expriment que les quantités $(p_1, q_1, r_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ $(p_2, q_2, r_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ $(p_3, q_3, r_3, \xi_3, \eta_3, \zeta_3)$ sont les coordonnées de trois segments représentatifs de trois rotations autour d'axes Δ_1, Δ_2, Δ_3. Les trois dernières équations expriment que ces axes sont deux à deux dans un même plan.

Or, si trois axes pris deux à deux sont dans un même plan, ou bien ces axes forment un trièdre, ou bien ils forment un prisme, ou bien ils forment un triangle. Car nous excluons le cas où les trois axes étant dans un même plan seraient concourants ou parallèles. On prouverait, en effet, que dans ce cas le nombre des paramètres indépendants ne saurait être égal à 3.

Nous allons donc examiner les trois hypothèses précédentes.

Sphère glissant sur elle-même.

La première hypothèse ne fournit pas d'autre mouvement à trois paramètres que celui dans lequel un point du corps est fixe, ou ce qui revient au même, dans lequel une sphère du corps glisse arbitrairement sur elle-même.

Plan glissant sur lui-même.

La deuxième hypothèse ne donne que le mouvement d'un corps dont un plan glisse sur lui-même.

Reste la troisième hypothèse.

Dans ce cas les axes des rotations instantanées doivent être contenus dans un même plan et y former un triangle. Or, on aperçoit tout de suite un mouvement qui remplit cette condition.

Mouvement d'une figure qui reste symétrique d'une figure fixe.

Supposons une figure F qui se déplace de telle sorte qu'elle soit, dans toutes ses positions, symétrique d'une figure F_1 par rapport à un plan variable de l'espace. Comme la position du plan de symétrie dépend de trois coordonnées, nous aurons ainsi défini un mouvement à trois paramètres.

Or, soient F, F' deux positions de la figure; π, π' les plans par rapport auxquels elles sont respectivement symétriques d'une même figure F_1 de l'espace. C'est une proposition de géométrie élémentaire facile à établir qu'on peut amener F sur F' par une rotation autour de la droite d'intersection des plans π et π', rotation dont l'amplitude est le double de l'angle de ces deux plans. On voit donc que tout déplacement infiniment petit de la figure F est équivalent à une rota-

tion infiniment petite autour d'un axe Δ situé dans le plan π par rapport auquel F est symétrique de la figure fixe F_1.

Prenons, dans la figure fixe, un trièdre trirectangle T_1 ; son symétrique par rapport au plan π est un autre trièdre trirectangle T. Chaque arête de T s'appuie sur l'arête homologue du trièdre symétrique et la coupe au même point que le plan π, en sorte que T, T_1 déterminent sur le plan π le même triangle.

Réciproquement, si deux trièdres trirectangles T, T_1 définissent sur un plan π le même triangle, on sait que ces trièdres sont symétriques par rapport au plan de ce triangle. On peut donc définir sans ambiguïté le mouvement qui nous occupe en disant que :

Un trièdre trirectangle T *lié au corps est assujetti à s'appuyer par ses arêtes sur les arêtes d'un trièdre trirectangle* T_1 *fixe dans l'espace.*

Si A, B, C sont les points d'appui des couples d'arêtes concourantes, les deux trièdres sont symétriques par rapport au plan ABC et toute figure F liée au trièdre T est symétrique, par rapport à ce plan, d'une figure F_1 liée au trièdre fixe T_1.

Toute courbe C liée au trièdre T ne cesse de s'appuyer sur une courbe C_1 liée à T_1 et dont elle est la symétrique, etc.

Ce mouvement intéressant convient à notre troisième hypothèse. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elle ne comporte pas d'autre solution.

Si l'on vient à assujettir le plan π à une condition, il enveloppe dans le corps mobile une surface fixe S, et dans l'espace une surface S_1 dont S est la symétrique, en sorte qu'on obtient alors un mouvement à deux paramètres dans lequel une surface S roule sur une surface S_1 dont elle est sans cesse la symétrique par rapport au plan tangent commun. Nous retrouvons ainsi le cas particulier de roulement de surfaces signalé à la fin du numéro précédent.

CHAPITRE XI

Les Systèmes articulés.

Historique des systèmes articulés.

86. Par ses nombreux contacts avec la géométrie et par les applications multiples qu'elle trouve dans la pratique, la théorie des systèmes articulés constitue une transition naturelle entre les doctrines géométriques qui précèdent et la théorie des mécanismes que nous étudierons plus loin. La théorie des systèmes articulés ne date que de 1864. Sans doute on les a utilisés bien avant cette époque; il se peut même que quelque esprit amoureux de précision rétrospective découvre des systèmes articulés dans l'antiquité la plus reculée; nous apprendrions une fois de plus que tout siècle détient inconsciemment entre ses mains les découvertes des siècles futurs, et que l'histoire des choses devance très souvent celle des idées. Lorsque, en 1631, le P. Scheiner publia pour la première fois la description de son pantographe, il ne connut certainement pas l'idée générale dont son petit appareil n'était qu'une manifestation naissante; on peut même affirmer qu'il ne pouvait pas la connaître, car cette idée tient à la notion élevée de la *transformation* des figures, notion qui appartient à notre siècle et donne un caractère uniforme à tous les progrès qu'il a vus s'accomplir.

Le mérite de Peaucellier, de Kempe, de Hart, de Lipkine est moins d'être parvenu à tracer avec des systèmes articulés telle ou telle courbe particulière, que d'avoir aperçu les moyens de réaliser avec ces systèmes de véritables transformations géométriques.

Dans cette remarque réside ce qu'il y a de vraiment général dans la théorie des systèmes articulés.

On connaît, et l'on trouvera du reste décrit plus loin, le dispositif

appelé *parallélogramme de Watt;* cet appareil a pour objet de faire décrire *approximativement* un segment de droite à la tige d'un piston. Peaucellier, en 1864, trouva une solution *rigoureuse* du même problème à l'aide de simples leviers articulés. Sa solution passa inaperçue et, circonstance peu banale, précisément à l'époque où d'éminents géomètres en étaient arrivés à douter de la possibilité d'une solution du problème. Cependant, en 1871, M. Lipkine, élève de M. Tchebicheff, ayant trouvé de son côté la solution exacte de M. Peaucellier, et obtenu pour cette découverte une récompense de son gouvernement, l'attention se porta enfin sur le véritable inventeur, notre compatriote.

Peaucellier.

Lipkine.

Sylvester.

M. Sylvester s'intéressa particulièrement à cette belle découverte et s'employa à la vulgariser tout en étendant son domaine. Sous son inspiration les systèmes articulés ne tardèrent pas à acquérir une grande vogue en Angleterre, où ils firent l'objet des études de Hart, Clifford, Roberts, Cayley, Kempe. Ces éminents géomètres eurent d'abord en vue la description mécanique de courbes particulières : coniques, courbes cubiques, quartiques ou sextiques, courbes circulaires. Hart et Kempe trouvèrent de nouvelles et intéressantes solutions du problème du guidage rectiligne d'un point et réalisèrent d'intéressantes transformations.

Les géomètres anglais.

Travaux français.

En France, on peut citer les travaux de M. Saint-Loup sur les systèmes articulés et leur application à la résolution des équations; M. Laisant les a fait servir à la trisection de l'angle; M. Lemoine leur a consacré plusieurs écrits; M. Léauté, envisageant la question au point de vue pratique, s'est occupé de décrire *à l'aide de trois tiges* et avec le plus d'approximation possible une courbe donnée, problème qui est, au fond, une généralisation du guidage rectiligne *approché* de Watt déjà traitée par Tchebicheff.

La déformation du quadrilatère articulé est une question essentielle pour la théorie générale des systèmes articulés. M. Darboux lui a consacré plusieurs notes dans son *Bulletin* et dans les Comptes Rendus.

Ajoutons enfin que M. Neuberg a publié sur la question le résumé de conférences qu'il a faites, et où les principes de la théorie des systèmes articulés sont présentés sous une forme entièrement élémentaire. Le lecteur désireux de se renseigner sur la bibliographie des systèmes articulés pourra consulter la liste dressée par M. Liguine

et que le *Bulletin des sciences mathématiques* a publiée dans le tome VII de la 2e série, tome XVIII de la collection.

Définition d'un système articulé plan.

87. Pour les premiers auteurs qui ont écrit sur la théorie des systèmes articulés, un tel ensemble se composait de *tiges* rigides assujetties à se mouvoir dans un même plan, certaines d'entre elles étant reliées par des pivots normaux à ce plan de manière à laisser variables leurs angles.

Cette manière de voir s'explique, car les premiers appareils articulés, le pantographe, le parallélogramme de Watt, l'appareil de Peaucellier ne se composaient, schématiquement du moins, que de tiges ou droites articulées, les points décrivants étant constamment en ligne droite avec les points d'articulation.

Mais on en vint bientôt, avec Sylvester, à considérer la trajectoire d'un point lié invariablement à une tige et formant avec elle un triangle. On substitua dès lors une plaque triangulaire à la considération de la simple tige.

Il n'y a, du reste, aucune raison pour s'en tenir à la forme triangulaire.

Tout segment de droite, ou tige, qui se meut peut être considéré comme entraînant une figure plane qui lui est liée invariablement, et l'on voit alors que la considération d'une simple tige est au fond équivalente à celle d'une plaque plane qui glisserait sur son propre plan.

Nous pouvons, dès lors, donner la définition suivante d'un SYSTÈME ARTICULÉ PLAN :

C'est un ensemble de plaques ou figures planes assujetties à rester dans un seul et même plan, parmi lesquelles un certain nombre sont reliées entre elles par des charnières ou pivots normaux au plan commun.

Nous avons ajouté l'épithète *plan* parce que l'on rencontre aussi des systèmes articulés sphériques, ou plus généralement gauches, ainsi que nous l'indiquerons plus loin.

Si deux plaques d'un système articulé sont reliées par deux pivots, elles sont invariablement liées et ne forment qu'une seule et même plaque.

Si trois plaques A, B, C sont reliées deux à deux par des pivots formant un triangle, elles constituent un système indéformable et ne

forment qu'une seule et même plaque. Si donc on met de côté le cas peu intéressant de trois plaques montées sur un même pivot, on voit qu'il n'y a pas de système articulé comportant moins de quatre plaques ou *membres*, car tel est le terme que nous emploierons désormais.

Systèmes à quatre membres.

88. Les systèmes à quatre membres sont ainsi les plus simples des systèmes articulés. Ils ont, du reste, une importance réelle par l'usage constant que l'on en fait dans les systèmes plus compliqués. Conformément aux remarques précédentes, nous pourrons réduire par la pensée chaque membre à la tige rigide qui joint les pivots auxquels s'articulent les membres adjacents.

Supposons donc que nous disposions de quatre tiges de longueurs a, b, c, d, que nous articulons entre elles par leurs extrémités *dans l'ordre même qui précède*, savoir, la tige a avec la tige b, puis b avec c, puis c avec d et enfin d avec a.

Quadrilatère articulé.

Nous formons ainsi un *quadrilatère articulé*.

Il est à remarquer que le quadrilatère que l'on obtient ainsi est déformable et que sa forme dépend d'*un seul paramètre*. Un quadrilatère articulé peut présenter trois formes d'aspects différents. Il est toujours possible, en premier lieu, de former avec les tiges

Trois formes de quadrilatères articulés.

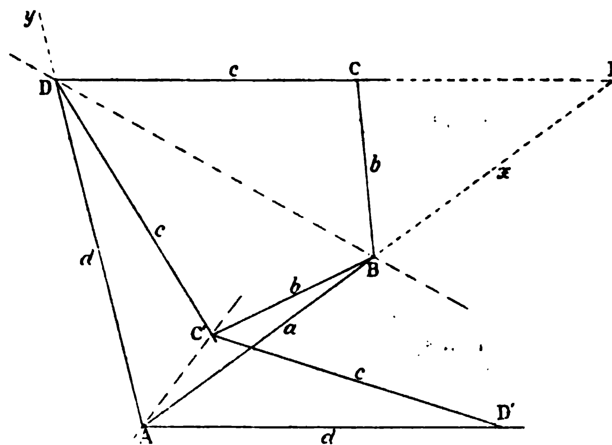


Fig. 63.

se suivant dans l'ordre *abcd*, un quadrilatère *convexe* tel que ABCD;

Soit C′ le symétrique de C par rapport à la diagonale BD, le quadrilatère ABC′D ainsi obtenu est ici *uni-concave,* il est formé par les mêmes tiges se suivant dans le même ordre *abcd*; soit enfin D′ le symétrique du point D par rapport à la diagonale AC′, le quadrilatère ABC′D′, que nous appellerons *bi-concave,* est également formé par les tiges précédentes se succédant dans l'ordre *abcd*.

Discussion de la construction d'un quadrilatère articulé.

Du reste, nous allons discuter les conditions de construction du quadrilatère articulé.

Considérons les tiges a et d qui s'articulent au point A (fig. 63), soit B l'extrémité de la tige a et D celle de la tige d. Appelons θ l'angle BAD, que nous pouvons toujours supposer compris entre 0 et 180°. Le triangle BAD nous donne

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos\theta.$$

La tige b doit s'articuler en B et la tige c en D; pour avoir le point C où s'articuleront b et c il faudra prendre un point de rencontre des cercles de centres respectifs B et D et de rayons b, c. Il faut, avant tout, que ces cercles puissent se couper, ce qui se traduit par les inégalités

$$(b-c)^2 < \overline{BD}^2 < (b+c)^2,$$

ou encore

$$(b-c)^2 < a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta < (b+c)^2.$$

On peut encore écrire

$$(1)\qquad \frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} < \cos\theta < \frac{a^2+d^2-(b-c)^2}{2ad}.$$

Ces conditions limitent en général la valeur du cosinus de l'angle des tiges a et d, en sorte que la révolution relative des tiges autour de leur pivot commun est limitée.

Pivots à révolution complète.

Mais si l'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} \leq -1 \\ \dfrac{a^2+d^2-(b-c)^2}{2ad} \geq 1, \end{cases}$$

le cosinus peut recevoir toutes les valeurs comprises entre -1 et

$+1$; nous dirons alors que le pivot est à *révolution complète,* car le quadrilatère est, dans ce cas, constructible pour toute valeur de l'angle θ.

Les conditions précédentes s'écriront

$$(a+d)^2-(b+c)^2 \leq 0, \quad (d-a)^2-(b-c)^2 \geq 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur $a+b+c+d$ dans la première inégalité,

$$(3) \quad a+d-b-c \leq 0, \quad (d-a+b-c)(d-a+c-b) \geq 0.$$

Condition pour qu'un quadrilatère ait des pivots à révolution complète.

On peut toujours appeler a le plus petit des côtés a, d; supposons, de plus, pour fixer les idées $b < c$ (le cas de $b > c$ se discute de même); le facteur $d-a+c-b$ est positif et les inégalités ci-dessus se réduisent à

$$a+d-b-c \leq 0, \quad d-a+b-c \geq 0.$$

La première inégalité s'écrit

$$(a-b)+(d-c) \leq 0$$

et la seconde

$$d-c \geq a-b.$$

La première inégalité est donc incompatible avec l'hypothèse $a > b$, car alors $a-b$ et $d-c$ seraient positifs; leur somme ne pourrait être négative.

On a donc forcément $a \leq b$, et comme $b < c$, on a $a \leq b < c$; on a supposé d'ailleurs $a < d$, donc a est le plus petit côté du quadrilatère.

Ainsi, quand un pivot est à révolution complète, il appartient à la plus petite tige du quadrilatère.

On peut ajouter que *dans ce cas la somme du plus petit et du plus grand côté est au plus égale à la somme des deux autres.*

Si d est le plus grand côté, cela résulte de la condition supposée remplie

$$a+d-b-c \leq 0;$$

supposons, au contraire, que ce soit c, on a alors $b < c$, et nous avons vu que l'on a dans cette hypothèse

$$d-a+b-c \geq 0$$

ou

$$\overline{a+c}-\overline{b+d}\leq 0,$$

ce qui démontre encore le théorème.

Même démonstration si b est le plus grand côté.

La réciproque de ce théorème est vraie et elle va nous conduire à un résultat complet.

Supposons que le plus petit côté a, ajouté au plus grand, donne une somme au plus égale à celle des deux autres côtés; *on va prouver que les deux pivots situés sur le plus petit côté a sont à révolution complète.*

Soit, en effet, d un côté s'articulant au côté a; il suffit de prouver les inégalités

$$a+d-b-c\leq 0,$$
$$(d-a)^2-(b-c)^2\geq 0,$$

qui expriment que le pivot où d et a s'articulent est à révolution complète; car la même démonstration s'appliquerait à l'autre pivot porté par a.

Supposons d'abord que d soit la plus grande des quatre tiges, on a alors, par hypothèse,

$$a+d\leq b+c;$$

c'est justement la première inégalité à vérifier; si l'on suppose, pour fixer les idées, $b < c$, comme on a $d > c$, $a < b$ on trouvera

$$d-a > c-b,$$

où $d-a$, $c-b$ sont positifs, et en élevant au carré,

$$(d-a)^2 > (c-b)^2,$$

ce qui est la seconde condition. De même si on avait $b > c$.

Faisons maintenant une autre hypothèse et supposons que la plus grande tige soit b ou c, c par exemple; on a par hypothèse

$$a+c-b-d\leq 0$$

ou encore

$$a+d-b-c+2(c-d)\leq 0,$$

comme $c-d$ est positif, il faut bien que $a+d-b-c$ soit négatif, ce qui est la première inégalité à démontrer. On a ensuite, d'après l'hypothèse,

$$c-b\leq d-a,$$

où $c - b$ et $d - a$ sont positifs, donc

$$(c - b)^2 \leq (d - a)^2,$$

ce qui est la seconde inégalité qu'il fallait prouver. Le cas où b est le plus grand côté se traite de même.

Ainsi, en résumé :

Si un pivot d'un quadrilatère est à révolution complète, il en existe un second qui se trouve dans les mêmes conditions, et ces deux pivots sont aux extrémités de la plus petite tige; de plus, la somme de la plus grande et de la plus petite tige est alors égale au plus à la somme des deux autres tiges. Cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'il existe des pivots à révolution complète.

Nos raisonnements n'excluent pas les cas limites, en sorte que le théorème est vrai même s'il y a égalité entre les deux sommes de l'énoncé.

Quadrilatères qui ont trois pivots à révolution complète.

Cherchons maintenant s'il y a des quadrilatères articulés admettant plus de deux pivots à révolution complète. Dans ce cas, deux pivots opposés, A, C par exemple, sont à révolution complète.

Or, nous avons trouvé les conditions suivantes pour que A soit à révolution complète (fig. 63) :

$$a + d - b - c \leq 0,$$
$$(d - a)^2 - (b - c)^2 \geq 0;$$

pour que C soit aussi à révolution complète il faudra avoir, de même,

$$b + c - a - d \leq 0,$$
$$(b - c)^2 - (d - a)^2 \geq 0;$$

le rapprochement de ces inégalités nous prouve que

$$a + d - b - c = 0,$$
$$(d - a)^2 - (b - c)^2 = 0.$$

Il y a deux cas à distinguer :

1° $$\begin{cases} a + d - b - c = 0, \\ d - a + b - c = 0; \end{cases}$$

2° $$\begin{cases} a + d - b - c = 0, \\ d - a - b + c = 0. \end{cases}$$

Le premier cas nous donne $a = b$, $d = c$. Nous trouvons donc un quadrilatère dans lequel les côtés sont égaux par deux, les côtés opposés étant] inégaux. Un tel quadrilatère s'appelle un rhomboïde, il a une forme convexe appelée *kite* ou cerf-volant par les Anglais et une forme uniconcave appelée *spear-head* ou fer de lance.

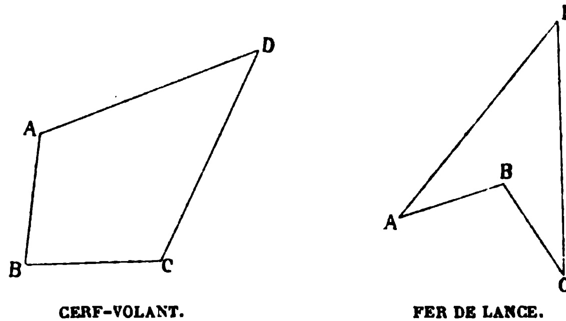


Fig. 64.

Supposons que AB, BC soit le couple des plus petits côtés; on vérifie aisément que les pivots A, B, C sont à révolution complète, mais que le pivot D, où aboutissent les grands côtés, est à révolution limitée.

Quadrilatères qui ont tous leurs pivots à révolution complète.

2° Examinons la seconde hypothèse; elle nous donne $a = c$, $b = d$. Les côtés opposés du quadrilatère sont égaux.

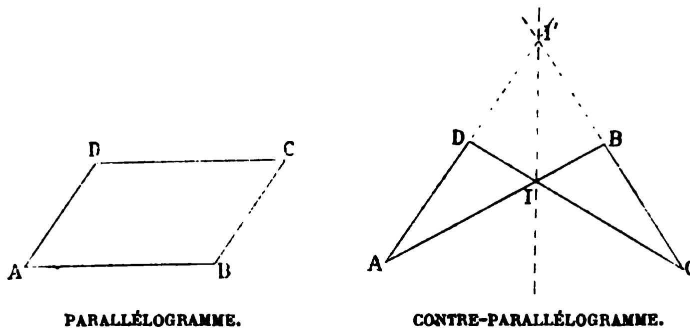


Fig. 65.

Le quadrilatère est alors, soit un parallélogramme, soit un quadrilatère bi-concave qui a reçu le nom de contre-parallélogramme. Le lecteur vérifiera aisément que dans ces deux derniers cas tous les pivots du quadrilatère sont à révolution complète.

Représentation de M. Darboux.

89. Dans un article inséré au tome III du *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e série, page 109, M. Darboux a rattaché la question de la déformation des quadrilatères articulés à la théorie des fonctions elliptiques. Voici en quelques mots le principe de sa méthode :

Soient α, β, γ les angles des tiges AB, BC, CD avec la tige DA; on a évidemment, en projetant sur DA et sur une perpendiculaire à DA,

$$(4)\qquad \begin{cases} d + a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0, \\ \quad a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(5)\qquad \begin{cases} d + ae^{i\alpha} + be^{i\beta} + ce^{i\gamma} = 0. \\ d + ae^{-i\alpha} + be^{-i\beta} + ce^{-i\gamma} = 0. \end{cases}$$

Posons $x = e^{i\alpha}$, $y = e^{i\beta}$, $z = e^{i\gamma}$; ces équations deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} + d = 0. \end{cases}$$

Interprétées en coordonnées rectangulaires x, y, z, ces équations représentent la section plane d'une surface du troisième ordre, c'est-à-dire une cubique plane. Or, une cubique plane est une courbe elliptique, c'est-à-dire du premier genre, et les coordonnées de ses points sont des fonctions uniformes doublement périodiques d'un paramètre. On pourra donc représenter ainsi x, y, z, et par suite $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; M. Darboux a développé ces calculs. La cubique devient unicursale si le plan est tangent à la surface cubique. On trouve qu'il faut avoir pour cela une relation de la forme

$$a \pm b \pm c \pm d = 0.$$

Comme il est impossible qu'un côté égale la somme des trois autres, il faut que la somme des deux côtés a et d égale celle des deux autres

$$a + d = b + c.$$

On peut supposer que a est le plus petit côté; alors d doit être le plus grand. On retrouve donc le cas limite déjà considéré. Le quadrilatère est alors constamment circonscriptible à un cercle.

Les quadrilatères qui ont plus de trois pivots à révolution complète correspondent aux cas où la cubique se décompose.

La méthode précédente fait correspondre des points imaginaires de la cubique à des positions réelles du quadrilatère.

On peut se proposer de trouver une représentation où les rapports de réalité soient conservés. Nous opérerons comme il suit :

Autre représentation.

Nous partons des équations

$$\begin{aligned} d + a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma &= 0, \\ a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma &= 0, \end{aligned}$$

a, b, c, d étant l'ordre de succession des côtés du quadrilatère.

Ces équations nous donneront $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$ quand $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ seront connus. Or, nous tirons de ces équations

$$(d + a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 = c^2,$$

ou encore

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + 2da\cos\alpha + 2db\cos\beta \\ & \qquad + 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est clair qu'à chaque système de valeurs de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ qui vérifient cette équation, il correspond une forme déterminée du quadrilatère. Si donc nous posons

$$(8)\quad \sin\alpha = \frac{2u}{1+u^2},\quad \cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin\beta = \frac{2v}{1+v^2},\quad \cos\beta = \frac{1-v^2}{1+v^2},$$

en sorte que u, v sont liés par l'équation

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + 2ad\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2} + 2bd\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2} \\ & \quad + 2ab\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} + 8\,ab\frac{uv}{(1+u^2)(1+v^2)} = 0, \end{aligned} \right.$$

à chaque système de valeurs de u, v vérifiant cette équation il correspond une forme déterminée du quadrilatère. Il faut observer que l'équation précédente admet à la fois les deux systèmes de solutions (u, v) $(-u, -v)$, et que ces deux systèmes de valeurs fournissent deux quadrilatères symétriques par rapport à la droite AD, c'est-à-dire qui peuvent être amenés en coïncidence par une rotation de 180° autour de la droite AD.

Les formules précédentes reviennent à faire correspondre à chaque forme du quadrilatère un point d'une courbe du quatrième degré du genre 1, dont u, v seraient les coordonnées d'un point courant.

Posons, pour abréger,

$$\alpha = -a+b+c+d,\quad \beta = a-b+c+d,\quad \gamma = a+b-c+d,\quad \delta = a+b+c-d,$$
$$\alpha' = d+a-b-c,\quad \beta' = d+b-a-c,\quad \gamma' = d+c-a-b,\quad \sigma = a+b+c+d;$$

l'équation précédente rendue entière s'écrit

$$-\delta\gamma' u^2 v^2 + \alpha\beta' u^2 + \beta\alpha' v^2 + 8abuv + \gamma\sigma = 0,$$

et en résolvant par rapport à v,

$$v = \frac{4abu \pm \sqrt{\varphi(u)}}{\delta\gamma' u^2 - \beta\alpha'},$$

où l'on pose

$$\varphi(u) = (\alpha\beta' u^2 + \gamma\sigma)(\delta\gamma' u^2 - \beta\alpha') + 16a^2b^2u^2.$$

Ces formules vont nous permettre de résoudre la question suivante : Avec des tiges de longueur donnée se succédant dans un ordre donné a, b, c, d, on a construit deux quadrilatères Q_0, Q_1; est-on assuré de pouvoir passer de Q_0 à Q_1 par voie de déformation en faisant varier les angles d'une façon continue? Désignons par (u_0, v_0) (u_1, v_1) les valeurs de u, v, correspondant aux deux quadrilatères; il faudra qu'en suivant de proche en proche des valeurs de u, v vérifiant l'équation ci-dessus, on puisse passer du système de solutions (u_0, v_0) au système (u_1, v_1).

Considérons l'ensemble des nombres réels et soient p, q deux de ces nombres; ces deux nombres réels partagent l'ensemble précédent en deux, savoir : l'ensemble des nombres tous finis compris entre p et q, et en second lieu l'ensemble des nombres qui ne sont pas compris entre p et q. Les premiers nombres constituent une suite continue; on peut en dire autant des seconds malgré que l'infini en fasse partie, et à la condition de ne point regarder comme une discontinuité le passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$ ou inversement. Cette conception est, comme on sait, en harmonie avec une multitude de faits géométriques; nous allons l'utiliser ici en observant que le passage par l'infini de u ou de v est un fait secondaire qui ne correspond à aucune discontinuité dans la déformation du quadrilatère. De même on peut dire que quatre nombres réels p, q, r, s partagent l'ensemble des valeurs réelles en

quatre ensembles $\overline{pq}$, $\overline{qr}$, $\overline{rs}$, $\overline{sp}$; l'un de ces ensembles comprend l'infini; ils sont tous extérieurs les uns aux autres.

Ceci posé, si p, q, r, s sont les quatre racines de $\varphi(u) = 0$ supposées réelles, il est clair que, dans deux ensembles contigus, $\varphi(u)$ acquiert des signes contraires, tandis que $\varphi(u)$ sera positif dans deux ensembles non contigus. Si donc on prend u_0 dans l'un de ces ensembles, et u_1 dans l'autre, il sera impossible d'aller de proche en proche de u_0 en u_1 en laissant $\varphi(u)$ positif, comme il doit l'être, et l'on pourra trouver deux quadrilatères Q_0, Q_1 irréductibles l'un à l'autre par voie de déformation. Il faut donc que $\varphi(u)$ ait seulement deux ou même zéro racines réelles.

Or, nous allons montrer que la dernière hypothèse doit être écartée. Si, en effet, le radical ne s'annule pour aucune valeur réelle de u, il sera impossible de passer du système de valeurs (v, u) au système (v', u) où v et v' correspondent l'un au signe $+$, l'autre au signe $-$ du radical. Il sera, par exemple, impossible de passer d'un quadrilatère Q_0 à son symétrique par rapport à DA. En résumé, il faut donc que $\varphi(u)$ admette deux racines réelles, qui seront forcément égales et de signes contraires. Posons $u^2 = U$. Le trinôme du second degré

$$(\alpha\beta'U + \gamma\sigma)(\delta\gamma'U - \beta\alpha') + 16a^2b^2U$$

devra admettre une racine positive unique; l'autre racine sera donc négative, et par conséquent le produit des racines sera négatif. On en conclut, α, β, γ, δ, σ étant positifs, la condition

$$\alpha'\beta'\gamma' > 0.$$

On aura remarqué que les équations (4) d'où nous sommes partis ne tiennent pas compte de l'ordre des côtés du quadrilatère. La condition précédente est naturellement dans le même cas, et les côtés y figurent symétriquement. Supposons alors, pour fixer les idées, que a soit le plus petit côté et d le plus grand; β', γ' sont positifs d'eux-mêmes, et la condition ci-dessus se réduit à

$$\alpha' = d + a - b - c > 0.$$

Ainsi nous retombons sur la même différence qui nous a déjà servi de critérium dans la question des pivots.

Si cette condition est vérifiée, on constate aisément par les mêmes

raisonnements que ci-dessus que l'on peut toujours passer d'un quadrilatère à l'autre par voie de variation continue des angles.

Si α' est nul, la courbe du quatrième degré devient unicursale et les cosinus et sinus des angles α, β, γ sont des fonctions rationnelles d'un même paramètre qui, par sa variation continue de $-\infty$ à $+\infty$, fournira tous les quadrilatères possibles en passant de l'un à l'autre par voie de déformation.

Le seul cas, par conséquent, où il y ait deux catégories de quadrilatères irréductibles les uns aux autres par voie de déformation, est celui où la différence

$$d + a - b - c < 0$$

est négative, c'est-à-dire les quadrilatères qui admettent *deux* pivots à révolution complète, et non circonscriptibles à un cercle.

Transformation des mouvements de rotation au moyen de quadrilatères articulés.

90. Supposons que dans un quadrilatère articulé ABCD on fixe une tige AD; on peut alors faire abstraction de cette tige et se contenter de porter l'attention sur les pivots fixes A et D. Les autres tiges AB, BC, CD constituent alors ce que les Anglais ont appelé un *trois-barres*. Dans la pratique, les tiges AB, DC portent le nom de *manivelles;* BC est la *bielle*.

Si A et D sont des pivots à révolution complète, quand la tige AB tournera continûment autour du point A, la tige DC tournera continûment autour de D. L'appareil transforme ainsi un mouvement de rotation continu autour de A en un autre autour de D.

Si A étant toujours à révolution complète, le pivot D était au contraire à révolution limitée, une rotation continue autour de A se transformerait en une rotation oscillatoire ou *alternative* autour du pivot D. On réalise alors avec l'appareil la transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire alternatif.

Enfin, en toute hypothèse, un mouvement circulaire alternatif autour de A se trouvera transformé en un mouvement circulaire alternatif autour de D.

Cependant si A est à révolution limitée et D à révolution complète, et si l'oscillation autour de A embrasse toute l'étendue de la révolution limitée, qui peut être accomplie autour de ce pivot, la tige DC tournera continûment autour de D et l'appareil permettra de trans-

former le mouvement oscillatoire autour de D en un mouvement continu autour de A.

Ainsi on peut, au moyen du trois-barres, réaliser la transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire continu; d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire alternatif et inversement; enfin, d'un mouvement circulaire alternatif en un autre mouvement circulaire alternatif, et le tout autour d'axes parallèles.

L'application des inégalités (1) ou (2) permettra, dans tous les cas, de définir la nature du mouvement ou inversement de construire un système qui transforme l'un dans l'autre deux mouvements donnés.

Il y a lieu d'observer qu'en dehors du cas du parallélogramme (où il est égal à l'unité) le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des vitesses angulaires des tiges AB, DC est variable.

La tige CB s'appuyant par ses extrémités sur les cercles de centres A, D et de rayons $AB = a$, $DC = c$ *(fig. 66)*, le centre instantané de rotation est le point de rencontre I des rayons prolongés AB, DC; si l'on appelle ε la vitesse de rotation instantanée autour de I, ω, ω' les

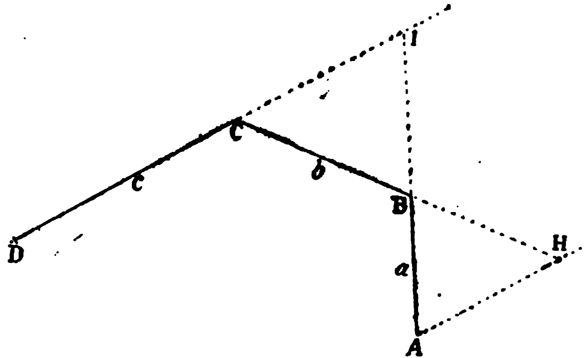


Fig. 66.

vitesses angulaires autour de A, D, les vitesses de B, C auront chacune deux expressions : $a\omega = \mathrm{BI}.\varepsilon$ pour B et $c\omega' = \mathrm{CI}.\varepsilon$ pour C; on en peut conclure

$$\frac{c.\omega'}{a.\omega} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{BI}},$$

ou

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{BI}}.$$

Prolongeons la bielle BC, soit H son point de rencontre avec la parallèle AH à DC, les triangles semblables BIC, ABH donnent

$$\frac{CI}{BI}=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{a},$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{AH}{c}.$$

La ligne AH étant variable, il en est de même du rapport des vitesses.

Parallélogramme.

91. Parmi les trois-barres les plus remarquables on peut signaler d'abord celui dans lequel ABCD est un parallélogramme. Dans ce cas, les tiges DC et AB restant parallèles, leurs vitesses angulaires sont constamment égales. On peut observer que dans ce cas tout point lié invariablement à l'une des tiges mobiles et formant ou non un triangle avec elle décrit toujours un cercle avec la vitesse angulaire propre à la tige AB (ou DC).

Contre-parallélogramme.

Le mouvement dans le cas du contre-parallélogramme est plus intéressant. Reportons-nous à la figure 65 et supposons fixée la tige AD. Le centre instantané de la bielle sera le point I, intersection des rayons (manivelles) AB, DC des cercles décrits par les extrémités B, C de la bielle. Le lecteur prouvera aisément l'égalité des triangles AID, CIB. Cherchons dès lors le lieu du centre instantané I dans le plan fixe (c'est-à-dire lié invariablement à AD). La somme

$$AI + DI = AI + IB = AB = a$$

est constante; ce lieu est donc une ellipse E_0 de foyers A, D et dont a est le grand axe. Cherchons de même le lieu de I dans la figure mobile (c'est-à-dire par rapport au segment BC). La somme $CI + IB = CI + ID = a$ est constante; en sorte que le lieu de ce centre instantané par rapport au segment BC est une ellipse E égale à la proposée, dont B, C sont les foyers.

La bissectrice II' de l'angle DIB est la tangente commune à E et E_0 au point I; du reste la figure est symétrique par rapport à cette tangente, en sorte que B est le symétrique de D et C celui de A. De la sorte le mouvement de la bielle BC est celui de l'axe focal d'une ellipse E qui roulerait sans glisser sur une ellipse E_0 égale et symétrique.

Au n° 58 nous avons examiné les roulements de cette nature.

Description des podaires d'ellipses et d'hyperboles avec un système articulé.

Nous savons qu'un point quelconque de la figure mobile décrit une podaire (amplifiée dans le rapport 2) de la roulette fixe par rapport à un point fixe du plan. Donc, dans le cas présent, tout point lié à la bielle BC décrira une podaire d'ellipse. Les points B, C, en particulier, décrivent des cercles; cela concorde avec ce fait que, dans l'ellipse, la podaire du foyer est un cercle.

Le lecteur prouvera aisément qu'en fixant la tige CD au lieu de la tige AD, on obtient un mouvement dans lequel tout point lié à la bielle AB décrit une podaire d'hyperbole.

Les lieux du centre instantané I' dans la figure mobile et dans le plan fixe sont, en effet, deux hyperboles égales qui roulent en restant symétriques par rapport à leur tangente commune.

Duplicateur de tours de Reuleaux.

On doit à Reuleaux un autre dispositif très curieux. Il consiste en un rhomboïde (*fig.* 67) dans lequel les deux grands côtés égaux $BC = BA$ sont doubles des deux petits côtés $AD = DC$. Fixons un des petits côtés, par exemple AD, et faisons tourner AB à partir de la position AB_0, DC est alors couché sur DA. Quand B décrit l'arc B_0BB_1 égal à $180° - 60° = 120°$, le point C décrit

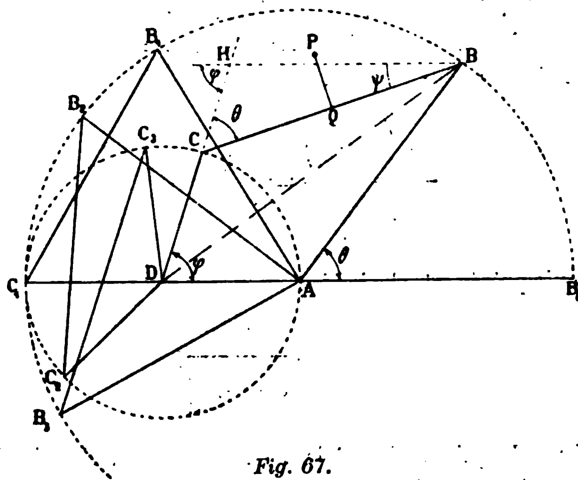


Fig. 67.

la demi-circonférence ACC_1. Quand ensuite B décrit l'arc de 60°, $B_1B_2C_1$, le point C décrit la demi-circonférence C_1C_2A, et lorsque AB est couché sur AC_1, DC est de nouveau couché sur DA. Ainsi, après un demi-tour de AB_1, CD a fait un tour complet. On constatera ensuite aisément que AB continuant son tour, DC en recom-

mence un autre; ainsi, AB étant en AB_2, DC est en DC_2. Quand B aura la position symétrique de B_2 par rapport à AD, DC sera de nouveau en DC_1, et finalement AB, revenant en AB_0, DC reviendra encore en DA. En résumé, après un tour complet de AB, CD aura fait deux tours.

La théorie analytique de cet appareil est, du reste, des plus faciles. Désignons par θ l'angle de AB avec AB_0, par φ celui de DC avec DA; dans le triangle ADB, l'angle ADB vaut $\frac{\varphi}{2}$ et l'angle DBA vaut $\theta - \frac{\varphi}{2}$; comme $DA = \frac{1}{2} AB$, on a donc

$$\frac{\sin\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{DA}{AB} = \frac{1}{2},$$

ou

$$(10) \qquad \tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta + 1}.$$

La discussion de cette formule conduit aux résultats précédents.

Cas général d'un rhomboïde quelconque.

Il y a lieu d'observer que si $DA = d$ et $AB = a$ sont quelconques, la même méthode nous donnera

$$(11) \qquad \frac{\sin\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{DA}{AB} = \frac{d}{a},$$

et la formule précédente deviendra

$$(12) \qquad \tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{d}{a}};$$

c'est la formule qui convient à la déformation d'un rhomboïde quelconque (¹). Soit P un point lié invariablement à la bielle BC; M. Cayley a fait voir que sa trajectoire est une courbe du quatrième ordre

(¹) La propriété si curieuse de duplication appartient au cas d'un rhomboïde quelconque. Les courbes roulettes pour la bielle sont des limaçons de Pascal dont un seul possède une boucle rentrante.

bi-circulaire à point double et, par conséquent, une podaire de conique.

Ce résultat est intéressant si on le rapproche de celui qui a été obtenu pour le cas du contre-parallélogramme.

Prenons AB_0 pour axe des x, une perpendiculaire en A pour axe des y, appelons Q la projection du point P sur BC et désignons par p, q les distances BQ, QP; soit enfin ψ l'angle de BC avec la parallèle BH à AD, l'examen du triangle BCH nous fait voir que l'on a $\varphi = \theta + \psi$. De la sorte, l'équation (11) devient, par l'introduction de ψ au lieu de φ,

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta - \psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right)} = \frac{d}{a},$$

ou encore

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{d + a}{d - a}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{13}$$

Projetons sur les axes le contour ABQP; nous avons ainsi les coordonnées x, y du point P.

$$x = a\cos\theta - p\cos\psi - q\sin\psi,$$
$$y = a\sin\theta - p\sin\psi + q\cos\psi.$$

Posons $m = \frac{d - a}{d + a}$, $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = t$, et nous aurons

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} x &= a\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + p\frac{t^2 - m^2}{t^2 + m^2} - qm\frac{2t}{t^2 + m^2},\\ y &= a\frac{2t}{1 + t^2} - pm\frac{2t}{t^2 + m^2} - q\frac{t^2 - m^2}{t^2 + m^2}.\end{aligned}\right.$$

On constate aisément qu'en faisant $t = -i$ ou $t = mi$ on obtient dans les deux cas le même point à l'infini dans la direction $y + ix = 0$; de même $t = +i$, $t = -mi$ donnent un point à l'infini dans la direction $y - ix = 0$. On peut en conclure que les formules (14) représentent une courbe unicursale du quatrième degré bi-circulaire, c'est-à-dire qui possède trois points doubles, dont un est à distance finie et les deux autres coïncident avec les points circulaires à l'infini.

Le même problème a été traité dans le cas général d'un quadri-

latère articulé quelconque par M. Roberts et par M. Cayley[1] (*Proceedings of the London mathematical Society*, t. VII). La courbe trajectoire est en général du sixième degré et admet comme points triples les points circulaires à l'infini. Elle admet en outre trois points doubles à distance finie.

Transformateurs articulés.

92. Les quadrilatères articulés dont on a fixé une tige constituent des systèmes à liaisons complètes. Nous pourrions continuer dans cette voie et considérer des systèmes articulés plus compliqués et également à liaisons complètes, mais il vaut mieux rattacher la considération de ces systèmes à celle des *transformateurs articulés*. Nous allons expliquer ce que nous entendons généralement par là.

Considérons un système articulé qui ne soit pas à liaisons complètes, c'est-à-dire tel que si l'on fixe un de ses membres, le mouvement des autres membres dépende de plus d'un paramètre. Nous nous en tiendrons d'ailleurs au cas de deux paramètres indépendants.

Soient deux points P, P′ liés chacun à l'un des membres du système, en sorte que, sauf les limites résultant des dimensions finies de l'appareil, P et P′ puissent décrire une figure arbitraire du plan. Quand P décrira une certaine figure d'un mouvement continu, P′ en décrira une seconde qui sera la transformée de la première.

Nous allons étudier quelques transformations que l'on peut ainsi réaliser au moyen de systèmes articulés.

Nous arriverons à ce résultat curieux qu'au moyen de simples quadrilatères articulés on peut réaliser la similitude, les rotations, les translations, l'inversion, toutes transformations qui sont anallagmatiques, c'est-à-dire qui changent un cercle du plan en un autre.

Pantographe du P. Scheiner.

Le parallélogramme articulé va nous fournir le *pantographe*.

Soit un parallélogramme articulé dont nous imaginerons les côtés suffisamment prolongés; considérons quatre points P, Q, R, S pris sur les côtés de ce parallélogramme et supposons que ces quatre points se trouvent en ligne droite dans une certaine position du paral-

[1] D'après M. Haton (*Mécanismes*, p. 193), l'équation de la courbe aurait été d'abord obtenue par M. de Prony.

lélogramme. Nous allons prouver qu'ils sont toujours en ligne droite quand le parallélogramme vient à se déformer.

En effet, puisque ces quatre points sont une fois en ligne droite, les segments constants PA, QA, PB, BR vérifient la proportion

$$\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{BR}.$$

Maintenant, cette proportion étant constamment satisfaite, il en

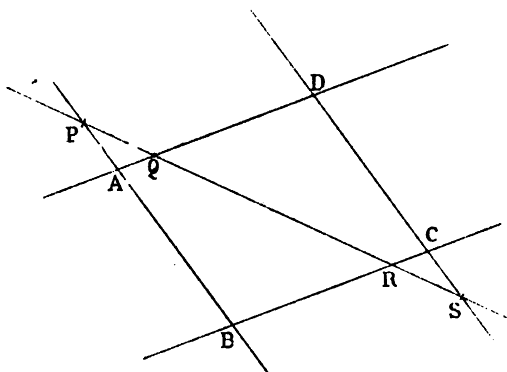


Fig. 68.

résulte inversement que, dans toute position du parallélogramme, les triangles PAQ, PBR sont semblables et alors les points P, Q, R sont en ligne droite. Même démonstration pour les points P, R, S, en sorte que les quatre points P, Q, R, S sont en ligne droite.

On remarquera que, d'après la similitude constante des triangles APQ, BPR, CRS, les longueurs variables PQ, PR, PS, sont entre elles dans des rapports constants.

Si donc on place en Q un pivot autour duquel le côté AD du parallélogramme pourra tourner, en faisant décrire une figure à la pointe d'un style placé en S, le point R, muni d'un traçoir, décrira une figure homothétique et Q sera le centre d'homothétie. On pourrait aussi placer le pivot en P, et le style et le traçoir en l'un quelconque des autres points Q, R, S.

Cet appareil est très connu sous le nom de *pantographe*.

Pantographe de Sylvester.

Sylvester a imaginé un autre pantographe.

Sur les côtés CD et BC d'un parallélogramme articulé construisons deux triangles semblables BEC, CDF dans lesquels les couples

d'angles égaux sont

$$\widehat{FDC} = \widehat{CBE}, \quad \widehat{FCD} = \widehat{CEB}, \quad \widehat{DFC} = \widehat{ECB}.$$

Supposons que l'on fixe le parallélogramme par son sommet A et que l'on réalise sous forme de plaques rigides les deux triangles BCE, CDF; nous allons prouver que si l'on fait décrire une certaine figure au point E, le point F décrira une figure homothétique qui aurait tourné d'un angle constant.

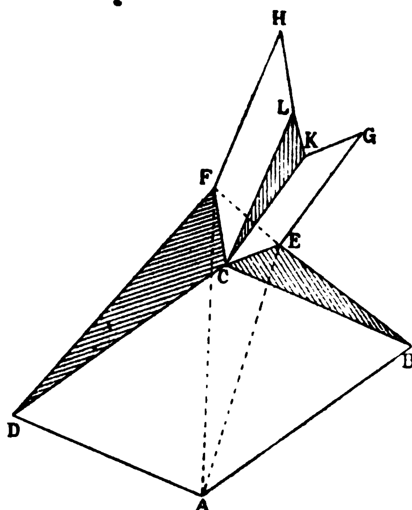


Fig. 69.

La similitude des triangles CDF et BCE nous donne, en effet,

$$\frac{DF}{DC} = \frac{BC}{BE},$$

et comme

$$DC = AB, BC = AD,$$

nous pouvons écrire

$$\frac{DF}{AB} = \frac{AD}{BE}.$$

Comme les angles en D et B des triangles FDA, EBA sont égaux, cette proportion prouve la similitude de ces deux triangles, et l'on a, par conséquent,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{DF}{AB} = \frac{AD}{BE} = \text{constante}.$$

J'ajoute que l'angle $\widehat{FAE}$ est égal à l'angle constant $\widehat{CBE}$. Car l'angle $\widehat{DAE}$, à cause du parallélisme de BC et de AD vaut la somme des angles $\widehat{AEB}$, $\widehat{CBE}$. Or il se compose de deux parties dont l'une $\widehat{DAF}$ est égale à $\widehat{AEB}$; donc la seconde partie $\widehat{FAE}$ est bien égale à $\widehat{CBE}$.

Le théorème est donc démontré.

Si l'on appelle α l'angle $\widehat{FDC}$ et r le rapport $\frac{DF}{AB}$, on voit qu'en

menant par A deux axes rectangulaires Ax, Ay, et regardant E, F comme les points représentatifs de deux variables imaginaires Z, Z_1, l'appareil précédent réalise la transformation

$$Z_1 = HZ,$$

où H est une constante imaginaire dont r est le module et α l'argument.

Réalisation d'une rotation.

Le même appareil permet de réaliser une *rotation*. Si, en effet, le triangle CDF et, par suite, le triangle CBE sont isocèles, AF est égal à AE. Dès lors, lorsque le point E décrira une figure, le point F décrira la même figure, qui aurait seulement tourné d'un angle $\alpha = FDC$.

Application à la courbe décrite par un point d'une bielle.

On trouve une intéressante application du pantographe de Sylvester dans la démonstration d'un très remarquable théorème dû à M. Roberts, et d'après lequel la courbe décrite par un point lié à une bielle peut être engendrée de deux autres manières au moyen de deux autres trois-barres.

Reportons-nous à la figure 69; supposons que le point E décrive un cercle de centre G et de rayon GE, le point F décrira un autre cercle de centre H et de rayon HF. Construisons les parallélogrammes ECKG et CFHL. Joignons les points L et K, nous formons ainsi un triangle dont l'angle KCL est égal à l'angle constant; $\alpha = \widehat{FDC} = \widehat{FAE}$. En effet, les deux rayons homologues GE, HF font entre eux l'angle α; or, ils sont parallèles à KC et LC. De plus, les côtés KC, CL de ce triangle sont constants; le triangle a donc une forme invariable; on peut même remarquer qu'il est semblable aux triangles CDF et EBC, car FH, EG sont dans le rapport de DF et de DC. On pourra donc, sans introduire aucune gêne au mouvement des points E, F sur leurs cercles, réaliser la plaque triangulaire LKC et l'articuler en C au parallélogramme ABCD, en K et L aux parallélogrammes CEGK, CLHF.

Ceci posé, envisageons le mouvement du point C.

Nous pouvons considérer le point C comme sommet du triangle CDF lié à la bielle FD dans le trois-barres ADFH, lequel est, au fond, un trois-barres quelconque.

Mais nous pourrons aussi bien regarder le point C comme étant le sommet du triangle BCE lié à la bielle BE dans le trois-barres ABEG, ou bien regarder le point C comme étant le sommet du triangle LKC lié à la bielle LK dans le trois-barres GKLH.

Ainsi se trouve établie la triple génération découverte par M. Roberts [1].

Principe de l'échange de bielle et manivelle.

Le pantographe de Sylvester donne encore lieu à une remarque intéressante connue sous le nom de principe de l'échange de bielle et manivelle.

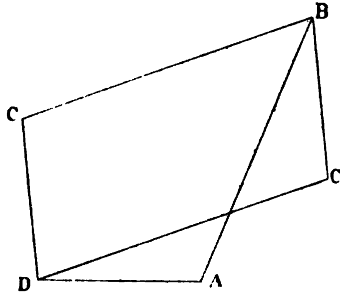


Fig. 70.

Soit un trois-barres quelconque ABCD, où DC, AB sont les manivelles et BC la bielle.

Construisons le parallélogramme DC′BC, dont le sommet D sera fixe.

Nous venons de voir qu'à tout point E lié à BC on peut faire correspondre un point F lié à BC′ et tel que les points E, F décrivent des courbes semblables.

Si donc on remplace les deux tiges DC, CB par les deux tiges DC′, C′B, ce qui revient à échanger la bielle BC contre la manivelle CD, on voit que l'ensemble des courbes décrites par des points liés à la nouvelle bielle sera composé de courbes semblables à celles que décrivent les points liés à la bielle primitive.

Autre démonstration du théorème de Cayley.

Cette remarque si simple nous fournit une démonstration intuitive du théorème démontré par M. Cayley au moyen du calcul sur les trajectoires dans le cas du rhomboïde. En effet, reportons-nous à la figure 70 qui, pour ne pas multiplier les figures, a été construite dans l'hypothèse où ABCD est un rhomboïde.

Si nous échangeons la bielle BC et la manivelle DC, nous obtenons le contre-parallélogramme ADC′B.

Nous savons que tout point lié à BC′, dans le mouvement du contre-parallélogramme, décrit une podaire de conique à centre; donc il en est de même, dans le mouvement du rhomboïde, pour tout point lié à BC.

Cette remarque nous permettrait même au besoin de déterminer la conique et le point double de la courbe.

Si BC est plus grand que AD, la conique sera une ellipse; elle sera une hyperbole dans le cas contraire.

---

[1] Cette démonstration est empruntée à l'excellent petit traité *Kinematik* de M. Petersen. Les trois pivots A, G, H sont les points de rencontre des asymptotes isotropes imaginaires conjuguées (foyers singuliers).

Inverseur de Hart.

93. Soit ABCD un contre-parallélogramme et P, Q, R, S quatre points qui, pour une forme du contre-parallélogramme, soient sur une même parallèle à la direction commune des diagonales AC, BD. On constate facilement que ces points restent toujours sur une même parallèle aux diagonales quand on vient à déformer le contre-parallélogramme.

Les triangles semblables APQ, ADB et DPR, DAC nous donnent

$$\frac{PQ}{AP}=\frac{BD}{AD}, \quad \frac{PR}{PD}=\frac{AC}{AD},$$

d'où

$$PQ.PR=\frac{PA.PD}{\overline{AD}^2}\cdot BD.AC.$$

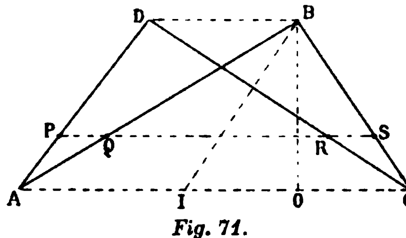


Fig. 71.

Or, menons BI parallèle à DA; la figure AIBD est un parallélogramme, en sorte que $BD=AI$ et IBC est un triangle isocèle, en sorte que le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur IC est le milieu O de IC. Nous avons, dès lors,

$$BD.AC=AI.AC=(AO-OI)(AO+OI)=\overline{AO}^2-\overline{OI}^2,$$

mais les triangles rectangles BAO et BIO nous donnent

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{OB}^2$$
$$\overline{BC}^2=\overline{BI}^2=\overline{OI}^2+\overline{OB}^2,$$

donc, par soustraction

$$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AO}^2-\overline{OI}^2=BD.AC.$$

On a donc, en définitive,

$$PQ.PR=\frac{PA.PD}{\overline{AD}^2}(\overline{AB}^2-\overline{AD}^2).$$

Il est ainsi prouvé que le produit PQ . PR est constant.

Si donc on assujettit la tige AD à tourner autour d'un pivot placé en P, et si l'on fait décrire une figure au point Q, le point R décrira une figure inverse de la première.

On démontrerait de même que le produit QP. QS est constant, en sorte que si l'on place en Q le pivot, les points P, S décrivent encore deux figures inverses, mais avec une puissance négative d'inversion.

Inverseur de Peaucellier.

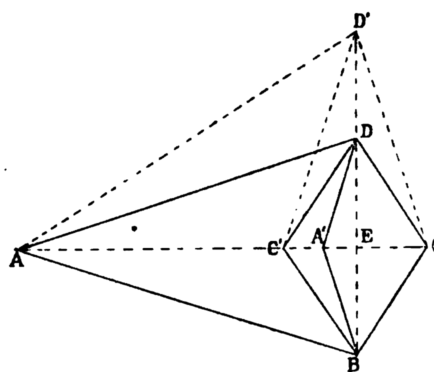


Fig. 72.

Un autre inverseur, qui est le premier dans l'ordre historique, est dû à Peaucellier.

Il se compose d'un losange BCDC', aux sommets B, D duquel s'articulent deux brides égales AB, AD, libres de tourner autour d'un même pivot A.

Les sommets C, C' sont constamment alignés sur le point A; de plus on a

$$AC.AC' = (AE + EC)(AE - EC)$$
$$= \overline{AE}^2 - \overline{EC}^2.$$

Or, les triangles rectangles ADE, DEC nous donnent

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2, \quad \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{DE}^2,$$

d'où

$$AC.AC' = \overline{AE}^2 - \overline{EC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \text{constante}.$$

Il en résulte que lorsque le point C décrit une figure, le point C' décrit une figure transformée de la première par rayons vecteurs réciproques.

La grandeur relative des brides AD, AB et des côtés du losange est sans importance; ainsi, l'on pourrait prendre comme brides les tiges A'B, A'C plus courtes que les côtés du losange; mais alors la puissance d'inversion serait négative et les points C, C' seraient constamment de part et d'autre du pôle A' d'inversion.

Généralisation de l'inverseur Peaucellier.

On a généralisé l'inverseur Peaucellier en remplaçant le losange BCDC' par un rhomboïde BCD'C'.

Rappelons d'abord que si dans un quadrilatère la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des

deux autres côtés, les diagonales de ce quadrilatère sont rectangulaires. La condition est nécessaire et suffisante (¹).

Dès lors, si l'on déforme un tel quadrilatère, ses diagonales restent rectangulaires; tel est le cas du losange, du rhomboïde.

Prenons alors (*fig.* 72) un rhomboïde BCD'C' et un quadrilatère à diagonales rectangulaires ABCD' ayant avec lui en commun les côtés BC et CD'; les diagonales CC', CA devant être toujours normales à la diagonale commune BD', sont toujours coïncidentes; les points C, C' sont en ligne droite, et l'on constate encore, comme plus haut, que le produit AC, AC' est constant.

Kempe et Sylvester ont généralisé également l'appareil de Hart en considérant des points pris en dehors des tiges d'un contre-parallélogramme. Ces géomètres sont ainsi parvenus à réaliser d'un même coup une inversion et une rotation, comme cela a lieu déjà pour la similitude dans le pantographe oblique. Mais nous renverrons le lecteur à deux articles insérés dans les tomes II et III de la *Nouvelle Correspondance*.

Translateur de Kempe.

94. Soient deux parallélogrammes articulés ABCD, BPP'C ayant un côté commun BC; fixons les sommets A et D; si l'on fait décrire

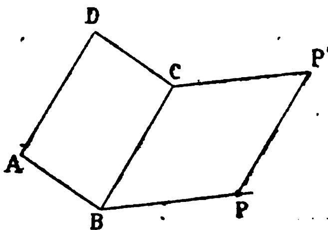


Fig. 73.

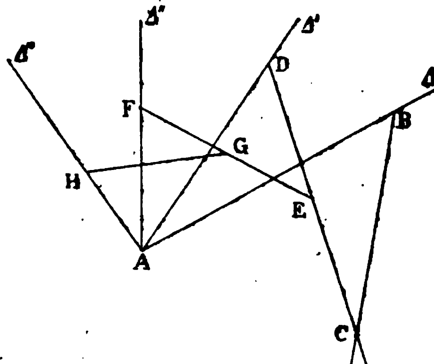


Fig. 74.

une figure au point P, il est clair que le point P' décrit une figure qui se déduit de la précédente par une simple translation.

(¹) Pour les propriétés des quadrilatères à diagonales rectangulaires, on pourra voir ce qu'en dit M. Darboux dans le mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* déjà cité.

Réverseur de Kempe.

Proposons-nous, étant données deux tiges Δ, Δ' articulées en A (*fig.* 74) d'en guider une troisième Δ'' articulée aussi en A et assujettie à rester symétrique de Δ par rapport à Δ'.

Prenons sur Δ, Δ' deux longueurs AB, AD et achevons le contre-parallélogramme ABCD, qui sera articulé en ses sommets. L'introduction de ces nouvelles tiges ne gêne en rien le mouvement relatif des tiges Δ, Δ'. Prenons ensuite sur DC une longueur DE telle que

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DA}{DC}$$

et achevons le contre-parallélogramme ADEF, articulé lui aussi en ses sommets. Ce nouveau contre-parallélogramme sera, d'après la proportion précédente, semblable au premier, et la tige AF ou Δ'' fera avec Δ' le même angle que Δ' fait avec Δ.

Réalisation de la symétrie.

Le réverseur de Kempe peut servir à réaliser la symétrie par rapport à une droite Δ'. Supposons, en effet, qu'avec deux de ces appareils on ait réalisé, outre le couple de tiges Δ, Δ'' un second couple Δ_1, Δ''_1 indépendant du premier, mais dans lequel les tiges Δ_1, Δ''_1 s'articulent encore en A, tout en restant symétriques par rapport à Δ'. Il est clair que l'on peut construire sur Δ et Δ_1 d'une part, sur Δ'' et Δ''_1 d'autre part, deux parallélogrammes qui ne cesseront pas d'être symétriques par rapport à Δ'. Les sommets P, Q de ces parallélogrammes opposés au sommet A seront sans cesse symétriques par rapport à la droite Δ'.

Multiplicateur de Kempe.

Le réverseur peut être considéré à un autre point de vue; il permet de guider une tige Δ'' qui fasse avec une tige Δ un angle double de celui que fait avec Δ une autre tige Δ'. A cet égard, il peut donc servir de duplicateur d'angles.

Mais on peut aller plus loin (*fig.* 74). Sur le contre-parallélogramme ADEF, construisons-en un second AFGH comme ADEF avait été construit sur ABCD, c'est-à-dire en prenant

$$\frac{FG}{AF} = \frac{AF}{FE},$$

la tige AH ou Δ''' fait avec Δ un angle triple de l'angle θ de Δ' avec Δ. En continuant, on aperçoit la possibilité de guider une tige $\Delta^{(n)}$ articulée en A, et faisant avec Δ un angle égal à $n\theta$.

Additeur et soustracteur de Kempe.

Enfin, le réverseur permet encore d'obtenir l'addition ou la soustraction des angles.

Supposons, en effet, que l'on ait, par l'emploi de deux réverseurs, obtenu que les tiges Δ, Δ'' demeurent symétriques par rapport à une tige Δ', ainsi que deux autres Δ_1, Δ_1''. Si l'on appelle θ, φ les angles de Δ_1, Δ_1'' avec Δ, il est clair que Δ'' fait avec Δ un angle égal à $\theta + \varphi$.

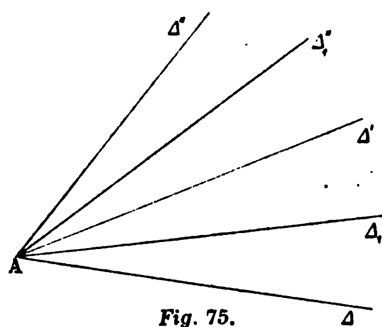


Fig. 75.

Si donc les tiges Δ_1, Δ_1'', Δ sont données, on pourra, par l'introduction de la tige auxiliaire Δ' et par le moyen de deux réverseurs guider une tige Δ'' qui fasse avec Δ un angle égal à la somme des angles de Δ_1, Δ_1'' avec Δ.

Si, au contraire, on regarde comme données les tiges Δ, Δ'', Δ_1, on pourra, par l'introduction de la tige auxiliaire Δ', guider une tige Δ_1'' qui fasse avec Δ un angle égal à la différence des angles que font avec Δ les tiges Δ'' et Δ_1; on a, en effet,

$$\widehat{\Delta_1'' A \Delta} = \widehat{\Delta'' A \Delta} - \widehat{\Delta_1 A \Delta}.$$

Théorème de Kempe.

Sur la considération de ces simples appareils, Kempe a fondé la démonstration de ce remarquable théorème : *

On peut toujours trouver un système articulé dont un point décrive une courbe algébrique donnée à l'avance.

La démonstration de cette proposition offre un exemple curieux des raisonnements généraux que l'on peut faire sur les systèmes articulés.

Soit donc une courbe algébrique $\mathcal{C}$, P un de ses points, O un point fixe du plan et Ox, Oy deux axes rectangulaires.

Construisons un parallélogramme articulé dont les côtés p, q auront des longueurs bien déterminées et dont O, P seront deux sommets opposés. Quand le point P décrira la courbe $\mathcal{C}$, le parallélogramme se déformera et les angles θ, φ que font ses côtés avec l'axe Ox varieront en restant liés par une certaine relation facile à former.

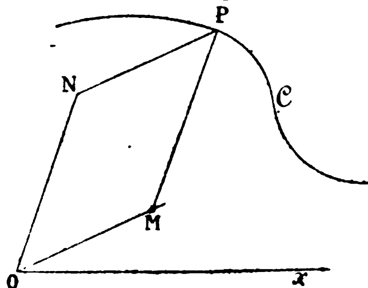


Fig. 76.

* Voir : Kempe A. B. „On a general method of describing plane curve of the nth degree by linkwork" Proceedings of the London Math'l Soc'y vol. 7 (1875-1876), pp. 213-216.

Soient x, y les coordonnées du point P, on a

$$x = p \cos\theta + q \cos\varphi,$$
$$y = p \sin\theta + q \sin\varphi;$$

si donc $f(x, y) = 0$ est l'équation entière et rationnelle en x, y de la courbe, $f(x, y)$ pourra s'écrire sous la forme d'un polynôme entier en $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et, remplaçant partout les puissances des sinus et cosinus par des cosinus ou des sinus des multiples des arcs, nous arriverons à mettre cette équation sous la forme

$$(15) \qquad \sum A \cos(m\theta \pm n\varphi + \alpha) = 0,$$

où m, n sont des entiers, A un coefficient positif constant et α désigne soit zéro, soit $\pm\frac{\pi}{2}$, soit π.

Comme θ est l'angle de OM avec Ox et φ celui de ON avec le même axe, nous saurons, au moyen de réverseurs employés comme multiplicateurs, additeurs ou soustracteurs, réaliser le guidage d'une droite $\Delta_{(m, \pm n, \alpha)}$ qui s'articule en O et fasse avec Ox l'angle $m\theta \pm n\varphi + \alpha$, tandis que OM, ON tournent autour de O [1].

Supposons donc construits tous les axes qui correspondent ainsi chacun à un terme de l'équation (15), et portons sur chacun d'eux, à partir de O, un segment $\overline{OH}_{(m, \pm n, \alpha)}$ dont la longueur soit proportionnelle au coefficient A du terme $\cos(m\theta \pm n\varphi + \alpha)$ dans l'équation (15).

L'équation (15) exprime que la somme des projections sur Ox de tous ces segments est nulle.

Pour éviter la complication des notations précédentes, dénotons par $\overline{OG_1}$, $\overline{OG_2}$, ..., $\overline{OG_\mu}$ les segments précédents.

Sur $\overline{OG_1}$ construisons le parallélogramme articulé $OG_1L_1K_1$ et puis le parallélogramme articulé $L_1K_1O'G'_1$; le segment $\overline{O'G'_1}$ est constamment égal et parallèle à $\overline{OG_1}$. De même, construisons les deux parallélogrammes articulés $OG_2L_2K_2$ et $K_2L_2G'_2G'_1$, le segment $\overline{G'_1G'_2}$ sera constamment équipollent au segment $\overline{OG_2}$. On pourra

[1] Si α est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$, il faudra supposer la tige $\Delta_{m, \pm n, \alpha}$ calée perpendiculairement à la tige $\Delta_{m, \pm n}$, qui fait avec Ox l'angle $m\theta \pm n\varphi$, et dont le guidage est obtenu au moyen de réverseurs. Si $\alpha = \pi$, on devra substituer à $\Delta_{m \pm n}$ son prolongement.

continuer ainsi et construire une figure polygonale $O'G'_1G'_2 \ldots G'_{\mu-1}G'_\mu$, dont chaque côté sera équipollent à l'un des segments $\overline{OG_1}$, $\overline{OG_2}$, ... $\overline{OG_\mu}$.

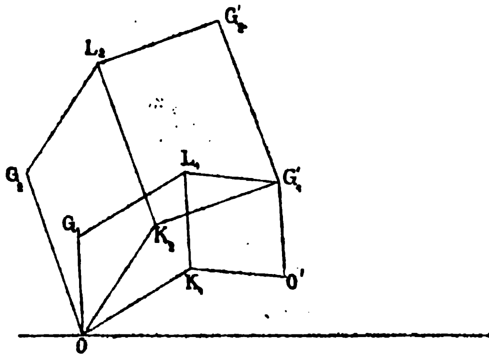


Fig. 77.

On pourra sans gêner le mouvement des tiges OG_1, OG_2, ..., OG_μ fixer le point initial O'. Cela posé, pour que l'équation (15) soit satisfaite, c'est-à-dire pour que le point P décrive la courbe $\mathcal{C}$, il sera nécessaire et suffisant que le point extrême G'_μ décrive la droite issue de O', perpendiculaire à Ox. Si, en effet, cela a lieu, la somme des projections du contour $O'G'_1G'_2 \ldots G'_\mu$ sur Ox sera égale à zéro. Or, nous allons voir qu'on peut toujours réaliser par un système articulé le guidage rectiligne d'un point, et, par suite, obliger le point G'_μ à décrire la droite considérée. Le théorème est donc démontré.

A une époque on a pu douter même de la possibilité du guidage rectiligne d'un point. Le théorème de Kempe résout donc par l'affirmative une question qui, *a fortiori*, pouvait être l'objet d'un doute (¹), celle du guidage d'un point sur une courbe algébrique d'ordre quelconque.

Il faut, du reste, bien remarquer que jamais un système articulé ne permettra de décrire une courbe transcendante, puisque toutes les relations qui existent à chaque instant entre les lignes et les distances des points du système sont d'ordre essentiellement algébrique.

Du guidage exact ou approché du mouvement rectiligne d'un point.

Balancier et contre-balancier.

95. Le guidage approché du mouvement rectiligne d'un point se trouve réalisé dans l'un des plus anciens systèmes articulés, le paral-

(¹) Voir la *Cinématique* de Laboulaye, 3ᵉ édition, p. 546. Lire notre remarque de la page 270.

lélogramme de Watt. Ce mécanisme offre une application du mouvement du trois-barres, combinée avec le pantographe de Scheiner.

Le dispositif que l'on désigne sous le nom de balancier et contre-balancier nous fournira tout d'abord le cas du *trois-barres* utilisé dans le parallélogramme de Watt.

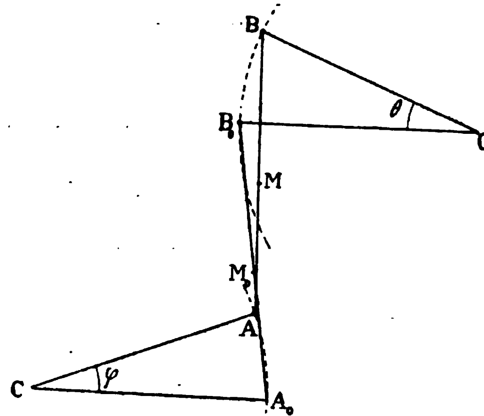


Fig. 78.

Figurons deux tiges horizontales égales OB_0, CA_0, reliées à leurs extrémités par une tige plus courte que la distance OC. La tige OB_0, mobile autour du point O, constitue le balancier, tandis que la tige CA_0, mobile autour de C, constitue le contre-balancier. Le milieu M de la bielle AB décrit une courbe qui a reçu le nom de courbe à *longue inflexion*.

Nous allons former en quelques lignes l'équation de cette courbe en prenant pour origine la position M_0 du point M correspondant à la position A_0B_0 de la bielle; les axes de coordonnées seront M_0x l'horizontale et M_0y la verticale du point M_0.

Comme M_0 est le milieu de OC, si (h, k) sont les coordonnées du point O, celles du point C seront $(-h, -k)$; désignons encore par a la longueur commune du balancier et du contre-balancier. On constate aisément que la bielle A_0B_0 a pour longueur

$$A_0B_0 = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}.$$

Supposons que OB_0 s'élève en OB et OA_0 en OA, en décrivant respectivement les angles θ, φ. Les coordonnées des points B, A seront

$$\text{B}\begin{cases} x = h - a\cos\theta, \\ y = k + a\sin\theta, \end{cases} \qquad \text{A}\begin{cases} x' = -h + a\cos\varphi, \\ y' = -k + a\sin\varphi, \end{cases}$$

d'où, pour la distance AB

$$\text{AB} = 2\sqrt{\left(h - a\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^2 + \left(k + a\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^2}.$$

Exprimons que $AB = A_0B_0 = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$, il viendra, après quelques simplifications,

$$(16) \quad a \sin^2 \frac{\theta+\varphi}{2} + 2\left(h \cos \frac{\theta-\varphi}{2} - k \sin \frac{\theta-\varphi}{2}\right) \cos \frac{\theta+\varphi}{2} = 2h.$$

Or, d'autre part, les coordonnées du point M ont pour valeurs

$$(17) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2} (\cos \varphi - \cos \theta) = a \sin \frac{\theta-\varphi}{2} \sin \frac{\theta+\varphi}{2}, \\ y = \frac{a}{2} (\sin \theta + \sin \varphi) = a \cos \frac{\theta-\varphi}{2} \sin \frac{\theta+\varphi}{2}. \end{cases}$$

Il est, dès lors, très facile d'introduire x, y dans la relation (16).

On trouve

$$(18) \quad (x^2 + y^2 - 2ah)^2 (x^2 + y^2) = 4(hy - kx)^2 (a^2 - x^2 - y^2).$$

On obtient donc une courbe tricirculaire du sixième degré (fin du paragraphe 91) qui a pour centre et pour point double le point M_0. Elle a la forme d'un huit allongé dont une branche touche en M_0 la verticale de ce point et y présente une inflexion. Elle coupe la verticale, outre le point M_0, en deux autres points M_1, M_2 situés de part et d'autre de M_0 à une distance $2\sqrt{h(a-h)}$ de ce point.

Si l'on va de M_1 à M_2 en suivant la branche qui touche en M_0 la verticale, on passe par trois points d'inflexion, dont le point M_0 et deux autres points symétriques par rapport à M_0. De là le nom de courbe à *longue inflexion*.

Nous allons montrer que si l'on suit la branche en question, l'écart de la courbe avec la verticale est extrêmement petit.

Nous nous servirons pour cela du principe de l'échange de bielle et manivelle.

Je construis le parallélogramme CDBA en introduisant les tiges articulées CD, DB, et je prolonge DB d'une quantité égale, BN = DB. Le point N est par rapport au point C l'homothétique de M, le rapport d'homothétie est égal à 2. Le point N décrit donc une courbe à longue inflexion, qui a au point O une tangente d'inflexion verticale, ON, et qui coupe cette verticale en un point N_1 homologue du point M_1 ci-dessus défini.

Joignons D, N au point O; comme BO = DB = BN, il en résulte que l'angle DON est droit; abaissons NP perpendiculaire sur ON_1 et

DH perpendiculaire sur OD_0. Les triangles DHO, NPO sont semblables et nous avons

$$PN = \frac{DH.OP}{OH},$$

Fig. 78 bis.

Le point D décrit un cercle de centre C et de rayon $l = CD = AB = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$. Quand N est en O, D est sur le cercle au point D_0 le plus éloigné de O, où ce cercle coupe l'horizontale de ce point.

Quand N vient en N_1, OD devient horizontal, le point D vient en D_1. Dans l'intervalle, le point D décrit l'arc D_0ED_1.

La plus grande valeur de DH est donc la flèche EF de cet arc, la plus petite valeur de OH est OD_1 et la plus grande valeur de OP est ON_1, car on constate aisément que la distance de N à l'horizontale OH va sans cesse en croissant de zéro à ON_1.

On peut donc écrire

$$PN < \frac{EF.ON_1}{OD_1}.$$

Calculons ON_1, OD_1, EF.

On a d'abord, $FD_0 = OD_0 - OF = 2a - 2h = 2(a-h)$, car $OD_0 = 2a$; donc $OD_1 = OF - FD_1 = OF - FD_0 = 2h - 2(a-h) = 2(2h-a)$.

Ensuite, puisque la distance $D_1N_1 = 2a$, il vient

$$ON_1 = \sqrt{\overline{D_1N_1}^2 - \overline{OD_1}^2} = 4\sqrt{h(a-h)};$$

enfin

$$EF = l - CF = l - 2k,$$

et l'on se souvient que $l = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$, d'où $2k = \sqrt{l^2 - 4(a-h)^2}$.

On peut donc écrire

$$PN < 2\,\frac{l - \sqrt{l^2 - 4(a-h)^2}}{2h - a}\sqrt{h(a-h)},$$

mais pour la courbe lieu du point M, qui se déduit du lieu de N en réduisant de moitié, l'écart sera inférieur à la moitié de cette limite.

$$\delta < \frac{l - \sqrt{l^2 - 4(a-h)^2}}{2h - a}\sqrt{h(a-h)}.$$

Si $a - h$ est petit vis-à-vis de l et de h, l'écart δ sera lui-même très petit.

Watt adoptait les proportions suivantes :

$$l = 24, \quad a = 37, \quad 2h = 72,$$

d'où

$$a - h = 1, \quad \sqrt{h(a-h)} = 6, \quad 2h - a = 35;$$

on trouve d'autre part

$$l - \sqrt{l^2 - 4(a-h)^2} < \frac{1}{11}, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{6}{11 \times 35} < \frac{1}{64}.$$

Supposons, par exemple, que $a = 1^m85$, ce qui revient à supposer que les nombres précédents expriment des vingtièmes de mètre; on aura, en mètres, $\delta < \frac{1}{1280}$, c'est-à-dire encore moins qu'un millimètre. Si l'on tient compte du jeu nécessaire au fonctionnement de l'appareil, l'écart doit être regardé comme pratiquement nul.

Balancier de Oliver Evans.

La figure 78 *bis*, que nous avons tracée pour démontrer la propriété si curieuse de la courbe à longue inflexion représente un mécanisme (tiges CD, OB et DBN) qui fait décrire au point N la courbe à longue inflexion. Or, ce mécanisme a été réalisé par Oliver Evans. On prend l assez grand et h très voisin de a; alors DH reste très petit, et l'arc D_0ED_1 se confond avec sa corde. Le point D se meut sensiblement sur l'horizontale du point O, tandis que N décrit approximativement la verticale ON_1. On produit donc approximativement le mouvement de l'ellipsographe.

Arrivons au parallélogramme de Watt.

Le système du balancier et du contre-balancier aurait l'inconvénient de ne fournir pour la course du point M, milieu de AB, que de trop petites amplitudes. Une application du pantographe nous a conduit au balancier d'Oliver Evans qui atteint ce résultat; une autre application du même principe nous conduira à l'appareil bien plus ancien et bien plus parfait dû à Watt.

Prolongeons le balancier OB d'une quantité BE = OB et achevons le parallélogramme ABEP; ce parallélogramme sera articulé en ses sommets. Tirons la ligne idéale OP, cette droite passe au milieu M du côté AB, et d'après la propriété essentielle du pantographe de Scheiner, le point P va décrire une courbe homothétique à la trajectoire de M; le rapport d'homothétie est égal à 2 et O est le centre de similitude. Le point P décrira donc sensiblement une verticale et l'amplitude de son déplacement sera le double de l'amplitude du déplacement du point M.

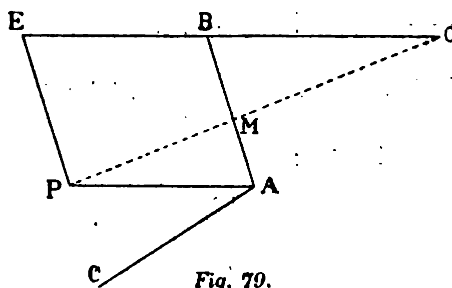


Fig. 79.

Dans la pratique, on utilise à la fois le mouvement sensiblement rectiligne du point P et celui du point M (1).

Autre guidage approché.

On a proposé d'autres guidages approchés du mouvement rectiligne d'un point. En voici un. Soit ABCD un trapèze isocèle articulé dans lequel AB est double de CD, et CMD un triangle isocèle lié invariablement à sa base DC; le point M tombe au milieu de AB. Lorsque le système se déforme, le point M décrit une courbe qui se confond partiellement avec le segment AB. On voit immédiatement que la courbe passe aux points A et B ainsi qu'au milieu de AB.

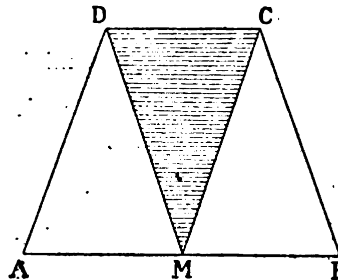


Fig. 80.

(1) On trouvera à la fin du volume une note relatant quelques travaux de Tchebicheff sur le parallélogramme de Watt.

Solutions exactes de Peaucellier et de Hart.

Le guidage exact du mouvement rectiligne d'un point a été résolu par Peaucellier et puis par Lipkine au moyen d'un même appareil. Observons tout d'abord que tout inverseur fournit le moyen de réaliser le guidage rectiligne d'un point. Il suffit, en effet, au moyen d'une bride d'obliger un point à décrire un cercle passant au centre d'inversion, pour que le point inverse décrive un segment de droite.

L'inverseur de Peaucellier et celui de Hart fournissent donc une solution immédiate du problème. Par exemple, dans le cas de l'appareil de Peaucellier (fig. 81), on introduira une bride O′ D articulée en O′ et D, dont la longueur soit égale à OO′. Le point D décrira un cercle passant au point O′ et le point B un segment de droite.

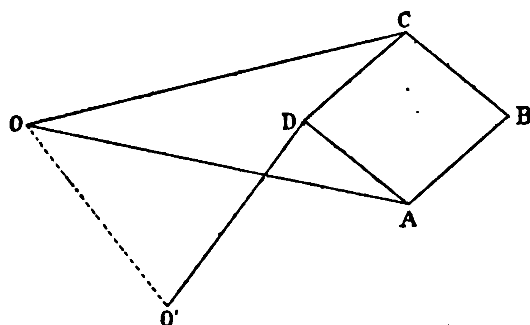


Fig. 81.

Il peut sembler paradoxal qu'un point soumis à des conditions géométriques décrive non une droite entière, mais seulement un segment fini. Le même fait se produit forcément à propos des courbes algébriques à branches infinies; le théorème de Kempe nous prouve qu'on peut décrire un arc de cette courbe, mais le jeu même de l'appareil articulé exige que cet arc soit limité.

Il n'y a là rien qui doive surprendre, et la géométrie descriptive, à l'occasion des projections des intersections des surfaces, nous offre des exemples analogues.

La remarque suivante explique comment ce fait peut arriver. Supposons qu'un point M d'une figure décrive, par exemple, un segment de droite; un point M′ voisin de M décrit alors une courbe fermée allongée, qui, lorsque M′ se rapproche de M, va en s'aplatissant de plus en plus jusqu'à se réduire au segment de droite. Tel est le cas du mouvement de l'ellipsographe. Tous les points de la figure décrivent des ellipses qui s'aplatissent indéfiniment et deviennent des segments de droites quand le point décrivant est très voisin de la circonférence qui, dans le mouvement, roule sans glisser dans une circonférence de rayon double.

Double rhomboïde de Kempe.

Kempe et Hart ont fait connaître plusieurs autres appareils à ligne droite.

Soit ABCD un rhomboïde articulé et prenons $EB = \frac{\overline{BC}^2}{AB}$; articulons en E une tige EF égale à EB et introduisons enfin une tige CF = BC articulée en F et C. Nous aurons ainsi réalisé un second rhomboïde semblable au premier. Les droites DC et CF sont également inclinées sur le côté AB, car l'angle des côtés opposés du grand rhomboïde, DC, AB, est égal à celui des côtés opposés CF et BE du petit rhomboïde. La bissectrice de l'angle C du triangle DCF est donc parallèle à AB et, par suite, la base DF de ce triangle est perpendiculaire à AB.

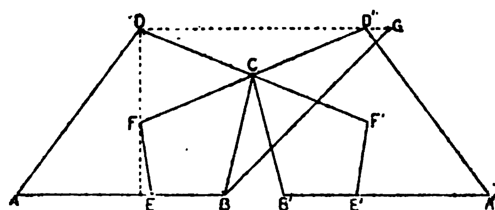


Fig. 82.

Introduisons alors une bride BG, pivotante autour de G, égale à AB et fixons le point D à une distance de G égale aussi à AB. Le quadrilatère ABGD est un losange, et dès lors DF restant perpendiculaire à AB, c'est-à-dire à DG, le point F décrit une droite perpendiculaire à GD.

Autre appareil de Kempe.

Reportons-nous à la figure 82; imaginons abaissée du point C une perpendiculaire sur AB, et prenons les tiges symétriques des tiges déjà construites (sauf BG) par rapport à cette perpendiculaire. Nous construisons ainsi un second double rhomboïde dans lequel les tiges CD′, CF′ sont les prolongements des tiges CF, CD. Remarquons alors que si l'on fixe le côté AB du premier double rhomboïde, la tige A′B′ demeure dans le prolongement de AB et tous les points de A′B′ décrivent ce prolongement.

On peut observer que ce procédé permet de réaliser une translation rectiligne quelconque d'une figure liée au segment A′B′ (1).

(1) A l'égard des mouvements réalisables par des systèmes articulés, on peut émettre la proposition générale que voici : *Tout mouvement plan algébrique*, c'est-à-dire dont les trajectoires de tous les points sont algébriques, *peut être guidé par un système articulé.* On peut, en effet, comme nous savons, guider par des systèmes articulés le mouvement de deux points de la figure; cela suffit pour établir le théorème. (Voir aussi mes notes de 1895 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*)

Sextilatère de Kempe.

Soit un quadrilatère ABCD,

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Prenons E arbitrairement sur AB et construisons le quadrilatère BEFG semblable au quadrilatère primitif; l'angle en B étant le même dans les deux et l'angle en G égal à l'angle en A, l'angle en E égal à l'angle en C et l'angle en F à l'angle en D.

On prend sur AD un point P et sur EF un point Q, tels que

$$\frac{AP}{EQ} = \frac{a.d}{b.c}.$$

Projetons P en P' et Q en Q' sur AB. *La distance* P'Q' *est constante quand le système se déforme.*

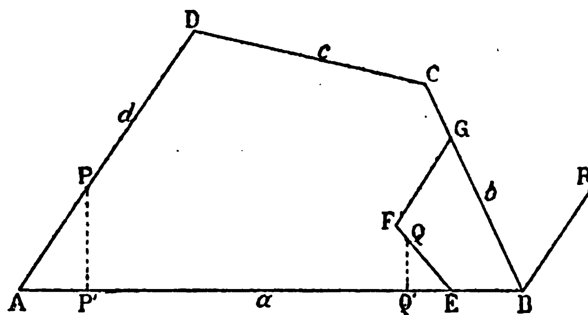


Fig. 83.

On a, en effet,

$$P'Q' = AE - (AP' + EQ').$$

Or, si l'on pose $AP = \frac{ad}{\lambda}$, $EQ = \frac{bc}{\lambda}$, on a

$$AP' = AP \cos A = \frac{ad}{\lambda} \cos A,$$

$$EQ' = EQ \cos(180 - C) = -\frac{bc}{\lambda} \cos C,$$

d'où

$$AP' + EQ' = \frac{1}{\lambda} [ad \cos A - bc \cos C].$$

D'autre part, le carré de la diagonale BD a cette double expression

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

d'où

$$ad\cos A - bc\cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2},$$

et, par suite,

$$AP' + EQ' = \frac{1}{2\lambda}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2),$$

et finalement

$$P'Q' = AE - \frac{1}{2\lambda}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2).$$

Ainsi la longueur $P'Q'$ reste constante quand le *sextilatère* (ABCD, EFG) se déforme. Supposons alors qu'on prenne un point R à une distance de P égale à AB et qu'on relie R à B par une bride RB égale et parallèle à AP; si l'on fixe en même temps le point P par un pivot, A, B, R, P sont les sommets d'un parallélogramme et la droite AB se meut parallèlement à elle-même; la distance du point P à la droite QQ' demeure constante, puisqu'elle égale $P'Q'$, de plus, comme QQ' a une direction constante, elle est fixe dans le plan et le point Q décrit cette droite.

Autre appareil dû à Hart. On doit à Hart un autre appareil à ligne droite, étudié aussi par Kempe *(Proceedings of the London Mathematical Society)*, qui a été l'objet d'un mémoire de M. Darboux, inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. III), et réimprimé dans la *Mécanique* de Despeyrous.

Soient OA, OA' deux segments de longueurs a, a' issus d'un point O, AB, A'B' deux autres segments de longueurs ma, $m'a'$ issus de A, A' respectivement et faisant avec OA, OA' un même angle θ.

Si l'on prend le point O pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires, on pourra regarder A, A' comme les points représentatifs de deux variables imaginaires Z_A, $Z_{A'}$ dont a, a' sont les modules et dont nous appellerons φ, φ' les arguments. Le produit de Z_A par le facteur $me^{i\theta}$ se représente par un point qui est l'extrémité d'un segment d'origine O, équipollent à AB; il en résulte que l'affixe du point B sera

$$Z_B = Z_A + Z_A . me^{i\theta} = Z_A(1 + me^{i\theta}) = ae^{i\varphi}(1 + me^{i\theta});$$

de même

$$Z_{B'} = Z_{A'}(1 + m'e^{i\theta}) = a'e^{i\varphi'}(1 + me^{i\theta}),$$

sera l'affixe du point B'.

Cherchons à exprimer que la distance BB' est constante et égale à une longueur l; si nous appelons Z_B^0, $Z_{B'}^0$ les quantités conjuguées de Z_B, $Z_{B'}$, il faudra écrire que

$$\begin{aligned} l^2 &= (Z_B - Z_{B'})(Z_B^0 - Z_{B'}^0) \\ &= Z_B Z_B^0 + Z_{B'} Z_{B'}^0 - Z_B Z_{B'}^0 - Z_{B'} Z_B^0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l^2 = a^2 (1 + m e^{i\theta})(1 + m e^{-i\theta}) &+ a'^2 (1 + m' e^{i\theta})(1 + m' e^{-i\theta}) \\ &- aa' e^{i(\varphi - \varphi')} (1 + m e^{i\theta})(1 + m' e^{-i\theta}) \\ &- aa' e^{-i(\varphi - \varphi')} (1 + m e^{-i\theta})(1 + m' e^{i\theta}), \end{aligned}$$

ou encore, en faisant $\psi = \varphi - \varphi' = \widehat{AOA'}$,

$$\begin{aligned} a^2 (1 + m^2) + a'^2 (1 + m'^2) - l^2 + 2 (a^2 m + a'^2 m') \cos \theta \\ - 2aa' (1 + mm') \cos \psi - 2aa' m \cos (\psi + \theta) \\ - 2aa' m' \cos (\psi - \theta) = 0. \end{aligned}$$

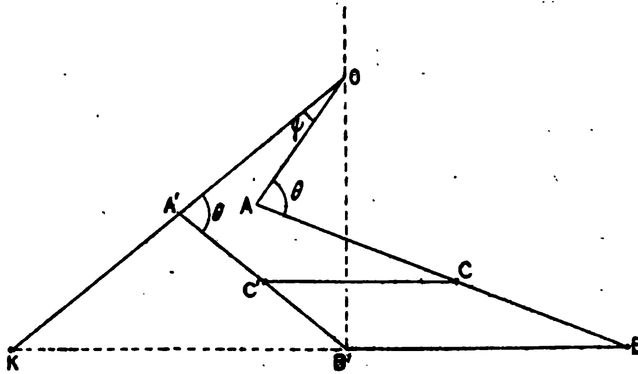


Fig. 84.

Si l'on suppose articulées en O, A, B, A', B' les cinq tiges OA, OA', AB, A'B', BB', nous obtenons un pentagone articulé dont les angles variables sont liés par la relation précédente, en y ajoutant l'égalité supposée des angles OAB, O'A'B', dont nous avons désigné par θ la valeur commune. Sans cette égalité supposée la déformation du pentagone dépendrait de deux paramètres.

Cette condition d'égalité d'angles peut être réalisée ici d'une façon très simple; on va prouver, en effet, que deux autres points C, C' pris sur AB, A'B' sont à une distance invariable, et dès lors il suffira d'introduire une tige CC' articulée en C, C' aux tiges AB, A'B' pour réaliser l'égalité d'angles supposée.

Ce couple de points C, C', s'il existe vraiment, sera analogue au couple de points B, B', et si l'on désigne par μ, μ' les valeurs de m, m' qui lui correspondent, par λ la distance CC', nous devrons avoir

$$\begin{aligned} a^2(1+\mu^2) + a'^2(1+\mu'^2) - \lambda^2 + 2(a^2\mu + a'^2\mu')\cos\theta \\ - 2aa'(1+\mu\mu')\cos\psi - 2aa'\mu\cos(\psi+\theta) \\ - 2aa'\mu'\cos(\psi-\theta) = 0; \end{aligned}$$

équation qui devra avoir lieu en même temps que la précédente, s'il est vrai que λ soit constant. Or, l'identification nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{m} = \frac{\mu'}{m'} = \frac{1+\mu\mu'}{1+mm'} = \frac{a^2\mu + a'^2\mu'}{a^2 m + a'^2 m'} \\ = \frac{a^2(1+\mu^2) + a'^2(1+\mu'^2) - \lambda^2}{a^2(1+m^2) + a'^2(1+m'^2) - l^2}; \end{aligned}$$

les trois premières équations se réduisent à

$$\mu = \frac{1}{m'}, \quad \mu' = \frac{1}{m},$$

et la dernière équation nous fait connaître λ par la formule

$$\frac{a^2\left(1+\frac{1}{m'^2}\right) + a'^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right) - \lambda^2}{a^2(1+m^2) + a'^2(1+m'^2) - l^2} = \frac{1}{mm'},$$

qui fournit pour λ^2 une valeur constante

$$\lambda^2 = \frac{l^2}{mm'} + \frac{(mm'-1)(m'-m)}{mm'}\left(\frac{a^2}{m} - \frac{a'^2}{m'}\right);$$

nous pourrons donc, au moyen de la tige auxiliaire CC', réaliser l'égalité constante des angles OAB, OA'B'.

Calculons les carrés des modules de Z_B, $Z_{B'}$ ou $\overline{OB}^2 = Z_B . Z_B^0$, $\overline{OB'}^2 = Z_{B'} . Z_{B'}^0$.

Nous avons déjà calculé ces expressions en calculant l^2, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= a^2(1+m^2+2m\cos\theta), \\ \overline{OB'}^2 &= a'^2(1+m'^2+2m'\cos\theta), \end{aligned}$$

en sorte qu'entre OB, OB' a lieu l'équation

$$\frac{m'}{a^2} \cdot \overline{OB}^2 - \frac{m}{a'^2}\overline{OB'}^2 = (m'-m)(1-mm').$$

Dans ces conditions, si l'on fixe la tige BB' et si l'on déforme le système articulé, on constate que le point O décrit un cercle. Cependant si les coefficients $\frac{m'}{a^2}$, $\frac{m}{a'^2}$ sont égaux, ce cercle se réduit à une ligne droite perpendiculaire à BB'.

En réalisant ces conditions on a donc le moyen de décrire une droite au moyen de cinq tiges articulées.

C'est à dessein que nous avons choisi la méthode précédente, qui montre le parti que l'on peut tirer des imaginaires ou, ce qui revient au même, du calcul des équipollences dans la théorie des systèmes articulés.

Description d'une ellipse au moyen de cinq tiges.

On peut s'arranger de sorte que la droite décrite par le point O aille passer au point B'; il faut pour cela que l'on puisse avoir $OB' = 0$, $OB = l$, ce qui donne

$$\frac{m'}{a^2} l^2 = (m' - m)(1 - mm').$$

Soit posé $\frac{a^2}{m'} = \frac{a'^2}{m} = g^2$, il viendra

$$l^2 = (a^2 - a'^2)\left(1 - \frac{a^2 a'^2}{g^4}\right).$$

Supposons de plus que A'B' égale OA' ou que $m' = 1$, on a donc $g^2 = a^2$, en sorte que

$$l^2 = \left(\frac{a^2 - a'^2}{a}\right)^2.$$

Dans ces conditions, le segment mobile OA' s'appuie par ses extrémités sur une droite fixe B'O et sur un cercle de centre B' dont le rayon $B'A' = OA'$ lui est égal; si donc on prolonge OA' d'une quantité égale jusqu'en K, en sorte que A' est le milieu de OK, le point K décrira une droite perpendiculaire en B' à B'O, et qui n'est autre dès lors que BB'. La tige OK glisse donc par ses extrémités sur deux droites rectangulaires et un quelconque de ses points décrit une ellipse. Ce système de cinq tiges permet ainsi de décrire une ellipse et de réaliser rigoureusement le mouvement de l'ellipsographe que le balancier d'Oliver Evans réalisait approximativement.

Des mouvements et des transformations que peut réaliser un même système articulé.

96. Soit un système articulé à liaisons complètes. On peut, avec cet appareil, réaliser plusieurs mouvements et plusieurs transformations.

Avec un système articulé on peut produire plusieurs mouvements.

1° Plusieurs mouvements, car on peut fixer l'un quelconque des membres du système et considérer la trajectoire d'un point de l'un quelconque des autres membres. Par exemple, dans le cas du rhomboïde, suivant que le côté fixé sera un des deux grands ou un des deux petits côtés, le lieu d'un point lié à la bielle sera une podaire d'hyperbole ou bien d'ellipse. Ainsi encore dans le contre-parallélogramme.

Plusieurs transformations.

2° Plusieurs transformations : fixons, en effet, par un pivot un point O d'un membre du système articulé ; choisissons ensuite un point M et un point N liés chacun à l'un des membres (ou bien même servant de pivot à deux ou plusieurs membres du système). Le point M sera le point directeur et N le point traceur.

Si l'on fait décrire au point directeur M les contours d'une figure, le point N tracera les contours correspondants de la figure transformée. Or, on voit que l'on peut choisir arbitrairement les points O, M, N dans le système et réaliser ainsi diverses transformations. Toutes ne seront pas également intéressantes, mais dans certains cas, cependant, on pourra, avec le même système, obtenir plusieurs résultats utiles.

Autre usage des inverseurs.

Ainsi reprenons le contre-parallélogramme qui nous a déjà servi à décrire des podaires d'ellipses et des podaires d'hyperbole, nous savons que Hart l'a utilisé comme inverseur en fixant un point O sur un côté et prenant sur les deux côtés adjacents deux points M, N qui restent alignés sur le point O.

On a alors $OM.ON =$ constante.

Mais au lieu de fixer le point O, fixons le point M, la relation ci-dessus s'écrit

$$MO\,(MN - MO) = k = \text{constante},$$

et la relation entre $\overline{MO}$ et $\overline{MN}$ exprime une transformation de la

forme

$$\rho_1 = \rho + \frac{k}{\rho},$$

où ρ, ρ_1 sont les rayons vecteurs MN et MO.

Description des cubiques circulaires unicursales à axe de symétrie.

Par exemple, si le point O, considéré comme point directeur, décrit une droite $\rho \cos \theta = p$, on trouve que le point N, considéré comme traceur, décrit la cubique circulaire

$$(x - p)(x^2 + y^2) = \frac{k}{p} x^2,$$

cette courbe a un point double et un axe de symétrie; si, k étant négatif, on prend $p = \sqrt{-k}$ on a une cissoïde, et une strophoïde droite si $p = \sqrt{-\frac{k}{2}}$.

Utilisation du mouvement inverse.

Si, après avoir fixé un membre A d'un système articulé à liaison complète, on constate qu'un point M d'un autre membre décrit une courbe C par rapport au membre A, il est clair qu'en supposant cette ligne tracée sur le membre A, elle ne cessera pas de passer par le point M lorsque, ayant rendu libre le membre A, on aura fixé le point M par un pivot; le même appareil nous permettra donc de réaliser le fait d'une plaque plane A assujettie à cette seule condition qu'une courbe C tracée sur cette plaque aille passer par un point fixe du plan.

Exemple. — Nous savons guider au moyen d'un système articulé le mouvement rectiligne d'un point, nous saurons donc, avec le même instrument, réaliser le guidage d'une figure plane assujettie à l'unique condition qu'une de ses droites glisse sur un point fixe.

Prenons l'appareil à ligne droite de Peaucellier; on supposera les deux pivots fixes O, O′ réunis par une tige qui constituera avec le double rhomboïde (*fig. 85*, page 288) et la bride O′B un système articulé tel que si l'on fixe le membre OO′ le point M décrira une droite Δ perpendiculaire à OO′ et coupant OO′ en son prolongement en un point fixe Q.

Concevons qu'on ait réalisé un segment RR′ de cette droite, calé perpendiculairement à OO′ (prolongée s'il le faut). Le segment RR′ et la tige OO′ ne forment qu'un seul et même membre. Si l'on vient à fixer par un pivot le point M et à rendre sa liberté au

membre OO′, ce membre se trouvera assujetti à cette condition unique que la tige RR′ qui lui est liée aille passer au point M.

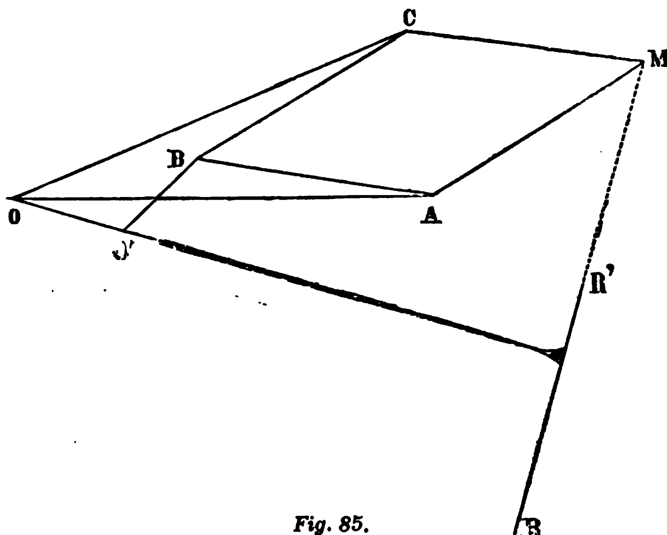


Fig. 85.

Protracteur.

Cet appareil permet alors de réaliser une transformation nouvelle. Si, en effet, on amène le point R′ en un point V′ du plan, le point R viendra en un point V situé sur le même rayon vecteur MV′ que le point V′, seulement ce rayon vecteur aura été accru d'une quantité constante R′R. Cet appareil réalise donc la transformation qui a pour effet d'augmenter (ou de diminuer) d'une quantité constante tous les rayons vecteurs d'une courbe. Cet appareil a reçu le nom de *protracteur*.

Description des conchoïdes.

Si le point R′ vient à décrire une courbe, le point R décrit une conchoïde de cette courbe.

Les exemples précédents suffisent pour montrer de quel genre sont les questions qui peuvent se présenter à propos des réalisations des transformations au moyen des systèmes articulés.

Applications des systèmes articulés à la résolution des équations et à la représentation des fonctions.

97. On a fait la remarque que les systèmes articulés pouvaient servir à représenter des fonctions ou à résoudre des équations. Nous

ne dirons que quelques mots de cette application qui est plutôt curieuse que vraiment pratique.

Fixons une tige Δ d'un système articulé, à liaisons complètes; un point M d'un membre du système décrit une courbe qui coupe Δ en certains points, dont les distances à un point pris pour origine sur Δ sont racines d'une certaine équation algébrique. Si donc on a gradué Δ, il suffira de noter les cotes des points de Δ où peut être amené le point M par la déformation du système articulé; on connaîtra ainsi les racines de l'équation proposée.

Les coefficients de cette équation sont des paramètres qui figurent dans la définition du système articulé; les racines de l'équation constituent les valeurs d'une fonction algébrique de ces paramètres indépendants, et à cet égard le système articulé fournit une représentation des valeurs de cette fonction algébrique, au moins dans certaines limites de variation des paramètres.

Si l'on sait trouver facilement les longueurs des tiges qui font prendre aux coefficients de l'équation des valeurs numériques données, et contenues entre certaines limites, on aura une classe d'équations résolubles au moyen du système articulé proposé.

A ce procédé de résolution mécanique on peut d'abord adresser le reproche de ne fournir qu'avec une faible approximation les racines cherchées; mais à cet inconvénient s'en ajoute un autre.

Nous avons vu qu'il est des quadrilatères qui, par déformation continue, ne peuvent prendre qu'une partie des formes que l'on peut obtenir en construisant tous les quadrilatères imaginables dont les côtés ont des longueurs données et un ordre de succession déterminé. Imaginons que notre système articulé offre une circonstance analogue; alors, par une déformation continue, le point décrivant M ne décrira qu'une partie de sa trajectoire et il pourra arriver que l'appareil ne fournisse qu'une partie des racines qu'il s'agit de trouver.

Résolution mécanique de l'équation du 3e degré.

97 *bis*. Soit un quadrilatère ABCD dans lequel nous prolongeons les côtés AB, CD jusqu'à leur rencontre en E; appelons θ l'angle DEA, nous avons

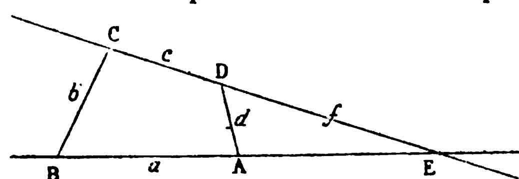


Fig. 86.

$$\overline{AD}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EA}^2 - 2ED.EA\cos\theta,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 - 2EC.EB \cos\theta;$$

d'où, en éliminant cos θ,

$$\left(\overline{ED}^2 + \overline{EA}^2 - \overline{AD}^2\right) EC.EB = \left(\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 - \overline{BC}^2\right) EA.ED.$$

On constate facilement que cette équation est générale et indépendante de la disposition des points situés sur une même droite, pourvu qu'on affecte de signes contraires deux segments opposés.

Imaginons que l'on articule en A, B, C, D le quadrilatère et que l'on fixe la tige AB supposée prolongée. Un point E de la tige CD prolongée décrit une courbe qui coupe en certains points la tige AB; nous nous proposons de former l'équation qui admet pour racines les distances du point E au point A.

Appelons a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère, f la distance DE, x la distance AE; nous comptons x positivement dans le sens BA; l'équation ci-dessus devient

$$(f+c)(x^2+f^2-d^2)(x+a) = f[(x+a)^2+(f+c)^2-b^2]x,$$

ou en développant,

$$cx^3 + a[c-f]x^2 - [c(f^2+d^2)+f(a^2-b^2+c^2+d^2)]x \\ + a(f+c)(f^2-d^2) = 0.$$

On peut identifier cette équation avec n'importe quelle équation du troisième degré

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où n est nul, il faudra prendre $f = c$, et les équations d'identification deviennent

$$2(c^2+d^2) + a^2 - b^2 = -p,$$
$$2a(c^2-d^2) = q.$$

On en tire

$$4c^2 = b^2 - a^2 - p + \frac{q}{a},$$

$$4d^2 = b^2 - a^2 - p - \frac{q}{a}.$$

Ces formules nous font connaître c, d; a et b peuvent être pris constants; cependant si les valeurs précédentes de c^2, d^2 devenaient

négatives, il faudrait pouvoir faire croître b de manière à rendre les seconds membres positifs.

On pourra réaliser ces conditions en insérant les tiges dans des douilles articulées entre elles et dans lesquelles les tiges pourront tantôt glisser, tantôt être fixées au moyen de vis de serrage. Le point A sera fixe sur la tige graduée AB et la tige CD devra aussi être graduée afin qu'on puisse plus facilement prendre le point E qui doit être le symétrique de C par rapport à D, attendu que $f = c$.

Systèmes articulés gauches.

98. Nous dirons que deux corps sont articulés s'ils sont réunis par une charnière ou un pivot ne leur permettant pas d'autre mouvement relatif qu'une rotation autour d'un axe, fixe dans les deux corps.

Prenons un ensemble de corps qui sont articulés chacun avec certains autres, de manière à limiter la déformation du système, nous aurons là un *système articulé* au sens le plus général de ce mot.

Les numéros précédents ne visaient que les cas où les pivots sont parallèles entre eux et où l'on peut se borner à la considération des plaques planes superposées. Ce cas est le plus fréquemment employé, mais les autres sont aussi utilisés. Par exemple, le pantographe de Scheiner a été étendu aux figures gauches et appliqué par M. Collas à la reproduction des statues.

Joint de Cardan.

Le joint de Cardan se compose :

1° D'un croisillon, c'est-à-dire de deux tiges égales $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ réunies à angle droit en leur milieu C;

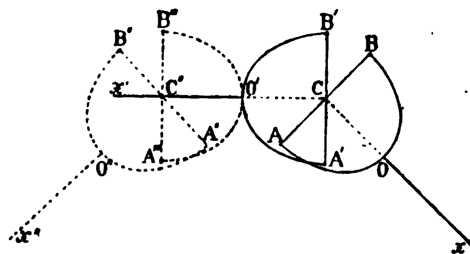


Fig. 87.

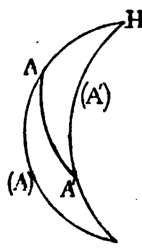


Fig. 88.

2° De deux tiges Ox, $O'x'$ qui sont munies chacune d'une fourche

portant à ses extrémités des œils dans lesquels s'engagent les extrémités cylindriques A, B, A', B' des deux tiges du croisillon; les fourches sont construites de telle sorte que les prolongements de Ox et de $O'x'$ aillent se croiser au point C.

Le joint de Cardan peut être utilisé de plusieurs manières. Si l'on fixe invariablement la tige O' X', le point C demeure fixe et la tige OX peut prendre tous les déplacements possibles autour du point C. On réalise par là le fait d'un axe géométrique pivotant autour d'un point fixe. Ce dispositif est employé dans nombre d'appareils de mécanique ou de physique et constitue alors le procédé de suspension dit à la Cardan.

Dans certains cas, comme dans le gyroscope, par exemple, on modifie un peu la disposition précédente, mais schématiquement le principe est le même. Rien n'empêche, en effet, de remplacer le croisillon par une couronne métallique armée, aux extrémités de deux diamètres rectangulaires, de prolongements cylindriques faisant le même office que les extrémités cylindriques des tiges du croisillon. Et même, rien n'empêche d'armer les fourches elles-mêmes de ces mêmes pivots, et de pratiquer, par contre, les œils où ils s'engagent dans la couronne elle-même.

Mais le joint de Cardan est encore employé à d'autres usages. Imaginons qu'au moyen de douilles ou autrement on interdise aux axes Ox, $O'x'$ tout autre mouvement qu'une rotation sur eux-mêmes. Le système devient à liaisons complètes, et toute rotation de Ox sur lui-même entraînera une rotation de $O'x'$ sur lui-même. Le joint apparaît donc comme un organe propre à *transmettre* un mouvement de rotation d'un axe à un autre axe qui le coupe.

Désignons par ω, ω' les vitesses angulaires de ces deux axes Ox, $O'x'$ et observons que sur la sphère S de centre de C et de rayon $CA = a$, le point A décrit *(fig. 88)* un grand cercle (A) dont O est le pôle, tandis que A' décrit sur la même sphère un grand cercle (A') de pôle O'. De plus, les points A, A' décrivent leurs cercles avec les vitesses $a\omega$, $a\omega'$.

Observons que, sur la sphère S, l'arc de grand cercle AA' vaut un quadrant. Le mouvement du croisillon est donc celui d'un quadrant de grand cercle AA' dont les extrémités A, A' décrivent deux autres grands cercles.

Désignons par H un des points de rencontre des deux grands

cercles (A) (A′), le triangle AA′H nous donnera

$$0 = \cos \widehat{AA'} = \cos \widehat{HA} . \cos \widehat{HA'} + \sin \widehat{HA} . \sin \widehat{HA'} . \cos H.$$

Or, $\widehat{H} = 180^\circ - 2\alpha$ où 2α est l'angle toujours obtus $x'Cx$. On a donc

$$\operatorname{cotg} \widehat{HA} . \operatorname{cotg} \widehat{HA'} = \cos 2\alpha.$$

Désignons $\widehat{HA}$ par θ, $\widehat{HA'}$ par θ' ; le quotient $\frac{d\theta}{d\theta'}$ est le rapport des vitesses des points A, A′, il est égal au rapport des vitesses angulaires des axes Ox, $O'x'$. Or, de $\operatorname{cotg} \theta . \operatorname{cotg} \theta' = \cos 2\alpha$, on tire

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = -\left[\cos 2\alpha . \sin^2 \theta + \frac{1}{\cos 2\alpha} \cos^2 \theta\right].$$

Le rapport en question oscille donc entre $-\cos 2\alpha$ et $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$.

C'est un inconvénient, car si l'axe Ox, par exemple, est animé d'un mouvement uniforme de rotation, l'autre axe sera animé d'une vitesse variable et périodique. On reconnaît en même temps que si 2α s'approche de 90°, ces oscillations augmentent considérablement, et que le mouvement sera rigoureusement impossible pour $2\alpha = 90^\circ$.

Enfin, si l'appareil est à disposition variable, c'est-à-dire si l'on a besoin de faire varier l'angle 2α, les conditions de la transmission varieront avec cet angle.

Joint Goubet. Dans le joint Goubet, toutes ces imperfections se trouvent écartées et l'on arrive à transmettre une rotation uniforme, toujours la même, quel que soit l'angle constant ou variable des deux axes.

Il y a plus de seize ans que le joint Goubet a été inventé; un modèle figura à l'Exposition universelle de 1878. L'attention des savants a été attirée récemment sur cet ingénieux appareil par l'application remarquable que l'inventeur en a faite à la propulsion et à la direction du bateau sous-marin qui porte son nom. La théorie en a été donnée par M. Résal dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (tome CXVII). Mais on peut sans aucun calcul se rendre compte de la propriété essentielle de ce joint.

Il consiste, au fond, dans la réunion de deux joints de Cardan.

Reportons-nous à la figure 87 et concevons qu'au point O′ on mène un plan normal à l'axe $O'x'$, puis que par rapport à ce plan on prenne les symétriques de la fourche A′O′B′, soit A‴O′B‴; du croi-

sillon $ABA'B'$, soit $A'B'A'''B'''$; de la fourche AOB et de l'axe Ox, soit $A'O'B'$ et $O'x'$. De plus, supprimons l'axe $O'x'$ et *soudons entre elles les deux fourches* $A'O'B'$, $A'''O'B'''$. Les extrémités A''', B''', A', B' des tiges du croisillon qui a C' pour centre sont engagées dans des œils pratiqués dans les fourches correspondantes. Enfin, si Ox, $O'x'$ sont engagés dans des douilles qui leur défendent tout autre mouvement qu'une rotation sur eux-mêmes, nous aurons évidemment réalisé un système articulé à liaisons complètes qui reste symétrique par rapport au plan médian mené par O' perpendiculairement à CC'.

Si le système des doubles fourches vient à tourner, il est clair qu'à cause de la symétrie, les axes Ox, $O'x'$ prendront des rotations égales sur eux-mêmes. Donc, inversement, si l'on impose à l'axe Ox une rotation ω, l'axe $O'x'$ prendra une rotation sur lui-même égale à ω. En particulier, si Ox tourne sur lui-même avec une vitesse constante, $O'x'$ tournera sur lui-même avec la même vitesse constante.

Ce résultat est remarquable non seulement à cause de la *transmission intégrale de la vitesse angulaire de rotation,* mais encore parce que *l'angle que font les deux axes n'intervient pas.*

Supposons, par exemple, que OX soit l'arbre de couche parallèle à la quille d'un bateau à hélice et $O'X'$ l'axe qui porte l'hélice.

A l'état normal, c'est-à-dire dans la marche rectiligne du navire, $O'x'$ sera dans le prolongement de Ox. Mais imaginons que, par un système d'engrenages se gouvernant de l'intérieur, on incline la direction de $O'x'$ tout en conservant la propriété *essentielle* [1] de la symétrie, l'hélice gardera sa vitesse uniforme, la même que celle de l'arbre de couche, en sorte qu'il n'en résultera aucun choc dans le jeu de la machine, et cependant, grâce à l'inclinaison de l'axe $O'x'$, l'hélice produira l'effet d'un gouvernail, et d'un *gouvernail actif,* ce qui, on le conçoit, augmente beaucoup la rapidité d'évolution du navire.

Joint Clémens. Le joint Clémens offre la même propriété que le joint précédent, mais il est moins commode, du moins dans certaines applications.

---

(1) M. Goubet réalise cette condition essentielle au moyen d'un engrenage limité à quelques dents.

Il a figuré en 1876 à l'Exposition de Philadelphie et a fait l'objet d'une note intéressante aux *Comptes rendus* (tome LXXXIV), par M. Rozé, le distingué Conservateur des collections de l'École polytechnique.

Imaginons deux tiges xO, AB s'articulant entre elles par leurs extrémités respectives O et A; par exemple, xO portera une petite tige formant un T dont les branches cylindriques s'engageront dans les œils d'une fourche terminant en A la tige AB. Concevons un plan fictif π passant par l'extrémité B et ne coupant pas la tige Ox; prenons, par rapport à ce plan, les symétriques des tiges Ox, AB, soit O'x', A'B'. Réalisons ces tiges et articulons-les, comme les précédentes, par leurs extrémités A', O'. Munissons l'extrémité B de AB d'une enveloppe sphérique creuse où s'engagera une sphère pleine égale terminant l'extrémité B' de A'B'. Par ce procédé on réalisera la coïncidence permanente des points B, B'. Enfin, engageons les tiges Ox, O'x' dans des douilles qui leur permettent seulement de tourner sur elles-mêmes. Dans ces conditions, l'ensemble des tiges forme un système à liaisons complètes; le point B, extrémité commune des deux tiges AB, A'B', décrit une cercle contenu dans le plan de symétrie π et la figure reste symétrique par rapport à ce plan. On voit donc, par la même raison de symétrie que ci-dessus, à propos du joint Goubet, que les tiges Ox, O'x' auront des vitesses de rotation constamment égales.

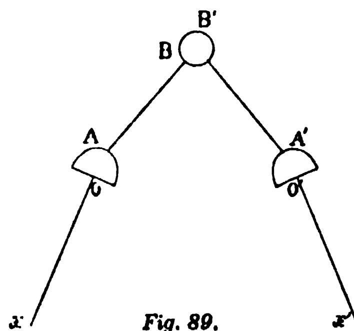


Fig. 89.

Dans la pratique, et pour assurer un guidage plus parfait, on ne se contente pas d'un seul couple de tiges AB, A'B', on en introduit un second.

Planigraphe. Comme autre exemple de système articulé gauche nous décrirons l'appareil qui, en application du théorème de M. Darboux démontré à la page 222, permet de décrire le plan ou plus exactement une zone plane.

Il s'agit, comme on sait, de réaliser le fait d'une tige ABC dont trois points A, B, C décrivent des sphères; les centres A_1, B_1, C_1 de ces sphères sont eux-mêmes en ligne droite. Il y a alors un point M

de la tige ABC qui décrit un plan normal à la tige $A_1B_1C_1$. Il suffit donc de relier les points A et A_1, B et B_1, C et C_1 par trois tiges de longueur invariables s'articulant par leurs extrémités aux tiges ABC et $A_1B_1C_1$. Nous sommes ainsi amenés à réaliser, par le moyen d'un système articulé, le fait de deux tiges *s'articulant en un point*, c'est-à-dire assujetties à l'unique condition d'avoir constamment en commun le même point; par exemple, le point A s'il s'agit des tiges AA_1 et ABC.

Voici comment on peut y parvenir :

Considérons un cylindre Γ de révolution, dont l'axe figure la droite ABC. Imaginons un anneau assez étroit embrassant le cylindre et pouvant glisser sur lui à frottement doux. Si l'on enfile ainsi plusieurs anneaux dont la largeur totale soit égale à la hauteur du cylindre et si, par des vis à tête placées aux extrémités du cylindre, on empêche les anneaux extrêmes de glisser dans le sens de l'axe, tous ces anneaux se caleront les uns aux autres et ne pourront prendre chacun qu'un mouvement de rotation sur eux-mêmes autour de l'axe du cylindre.

Imaginons maintenant que l'un de ces anneaux soit tel que son plan moyen passe par le point A; il y passera constamment. Dans ce plan moyen munissons l'anneau de deux broches cylindriques figurant les prolongements d'un diamètre, qui passe par le point A; puis engageons ces broches dans les œils d'une fourche F identique à celles que l'on utilise dans les joints de Cardan. Désignons par Δ la droite qui représente l'axe géométrique de la fourche. Par suite de la rotation de la fourche autour de la broche et de l'anneau autour du cylindre, la droite Δ peut recevoir toutes les orientations possibles autour du point A; l'effet produit est le même que dans un joint de Cardan dans lequel on aurait fixé l'une des deux fourches.

Figurons-nous maintenant un cylindre de révolution délié, dont l'axe figurerait la droite Δ et qui serait soudé à la fourche F. Enfilons sur ce cylindre plein un cylindre qui en sera la forme en creux et que nous empêcherons de prendre aucun mouvement de glissement par rapport au cylindre plein dans le sens des génératrices. Ce cylindre Γ' pourra s'orienter de toutes les façons possibles autour de A et, par rapport au cylindre Γ, réalisera le fait d'une tige articulée sur une autre *en un point*.

L'emploi d'un autre anneau dont le plan moyen passe par B et

d'un troisième dont le plan moyen passe en C, permettra d'articuler de même en ces deux points les deux tiges BB_1 et CC_1.

On fera de même pour la tige $A_1B_1C_1$ et les extrémités A_1, B_1, C_1 des tiges AA_1, BB_1, CC_1.

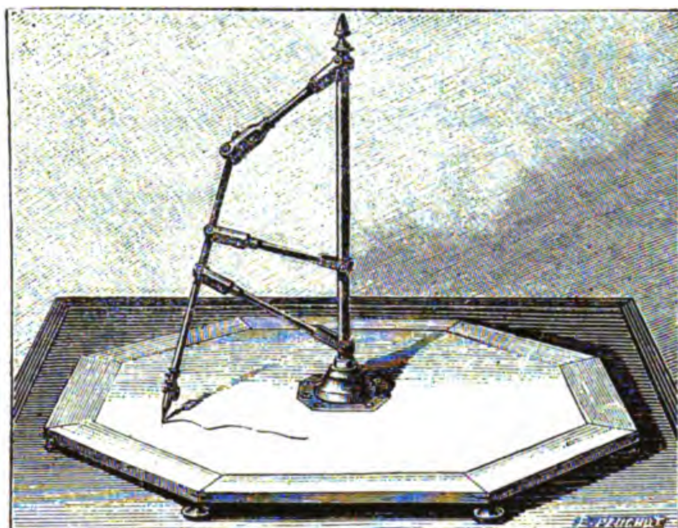


Fig. 90.

Tel est l'appareil qui a été construit et que représente la figure 90.

Ellipsoïdographe.

Supposons qu'une tige ABC soit assujettie à la condition que trois de ses points A, B, C décrivent des plans formant un trièdre $Oxyz$; un point quelconque de la tige décrit un ellipsoïde.

Soient, en effet, λ, μ, ν les angles des arêtes Oy, Oz; Oz, Ox; Ox, Oy et a, b, c les distances MA, MB, MC, où M est le point décrivant. Désignons par l, m, n les projections sur les axes, faites parallèlement aux plans de coordonnées, d'un segment de longueur 1 porté par la droite ABC; les coordonnées x, y, z du point M auront les expressions suivantes : x est la projection du segment AM, donc

$$x = a.l,$$

et de même

$$y = b.m, \quad z = c.n.$$

Or, l, m, n sont liés, comme on sait, par l'équation

$$l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos\lambda - 2nl\cos\mu - 2lm\cos\nu = 1.$$

Nous aurons donc, d'après les équations ci-dessus,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-2\frac{yz}{bc}\cos\lambda-2\frac{zx}{ca}\cos\mu-2\frac{xy}{ab}\cos\nu=1.$$

Le point M décrit donc bien un ellipsoïde.

Or, pour obliger les points A, B, C à décrire chacun un plan, il suffira d'articuler ponctuellement en A, B, C, sur la tige ABC, les extrémités des tiges de trois planigraphes. On réalise donc de la sorte un système articulé susceptible de décrire un ellipsoïde [1].

Théorèmes généraux sur les systèmes articulés.

Articulation de deux corps.

99. Je terminerai ce chapitre sur les systèmes articulés en démontrant plusieurs propositions que j'ai fait connaître en avril 1895 dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences.

Rappelons que nous appelons articulés deux corps dont le mouvement relatif se réduit à une rotation autour d'un axe, fixe dans chacun d'eux, qui sera l'*axe d'articulation*.

Si l'un des corps est une tige assimilable à une droite, nous supposerons toujours que la tige coupe à angle droit l'axe d'articulation. Le point de rencontre sera le *point d'articulation*, et le plan lié au corps dans lequel peut se déplacer la tige sera le *plan d'articulation*. Ce plan est ainsi à chaque instant le plan mené par la tige normalement à l'axe d'articulation.

Lorsqu'il s'agira de deux tiges articulées entre elles, nous supposerons que l'axe d'articulation est perpendiculaire aux deux tiges et que celles-ci coupent cet axe au même point d'articulation; le plan des deux tiges est normal à l'axe d'articulation et constitue le plan d'articulation commun des deux tiges.

Ces suppositions n'ont rien d'essentiel, mais elles précisent et simplifient les raisonnements.

Jonction ponctuelle.

Nous avons rencontré ci-dessus un autre mode d'articulation de deux tiges ou de deux corps, pour lequel nous adopterons la locution de *jonction ponctuelle*, où la condition imposée consiste dans la coïncidence constante de deux points, fixes dans chacun des corps.

---

[1] Nous avons vu, page 222, que si les plans décrits sont rectangulaires, la tige ABC reste normale à une surface.

On peut modifier le dispositif que nous avons déjà décrit et opérer comme il suit :

Concevons une sphère pleine S, qui porte deux petites broches cylindriques figurant les prolongements d'un diamètre. Ces broches s'engagent dans des œils pratiqués, aux extrémités d'un diamètre D, dans l'épaisseur d'un anneau extérieur et concentrique à la sphère S. L'anneau, à son tour, est muni de broches figurant les prolongements du diamètre perpendiculaire au diamètre D; ces broches s'engagent enfin dans les œils d'une fourche F pareille à celles qui ont été décrites plus haut. Dans ces conditions, l'axe de la fourche F est une droite Δ capable de s'orienter de toutes les façons possibles autour du centre O de la sphère. En réalisant alors, au moyen d'une douille comme il a été expliqué, un cylindre dont Δ soit l'axe et libre de tourner autour de Δ, on aura réalisé le fait d'un corps libre d'évoluer autour d'un de ses points O.

Que l'on fasse de même pour un second corps *en employant la même sphère* S, et nous aurons de la sorte un second mode de réalisation de la jonction ponctuelle de deux corps.

L'avantage de ce dispositif est de rendre possible la liaison invariable du point O, centre de la sphère et point d'articulation, à une figure mobile, sans gêner autrement le mouvement des corps qui se joignent en ce point.

Imaginons, par exemple, que l'on soude la sphère S à un système articulé qui oblige le centre O à décrire une droite, par exemple à un appareil Peaucellier, nous aurons réalisé le fait de deux corps mobiles assujettis à la condition de se joindre en un point qui doit rester lui-même sur une droite fixe.

Nous allons déduire de là une démonstration de lemmes importants.

Lemme I. Soient A et B deux corps tournant librement et indépendamment l'un de l'autre autour d'un axe fixe Oz. Une tige Δ s'articule au point O avec le corps A et de telle manière que le plan Π d'articulation passe par Oz, ce qui fait que l'axe D d'articulation est une droite issue de O et rectangulaire avec Oz. Une seconde tige Δ' s'articule dans les mêmes conditions au point O avec le corps B et le plan Π' d'articulation passe aussi par l'axe Oz. Les azimuts des plans Π, Π', qui sont aussi ceux des droites Δ, Δ', varient d'une façon quelconque, indépendamment ou non. Il s'agit de forcer les tiges Δ et Δ' à *faire avec Oz le même angle,* sans altérer en quoi que ce soit l'état

de liberté ou de dépendance relative des azimuts des plans Π et Π'.

Je dis qu'on peut y parvenir à l'aide de systèmes articulés.

En effet, prenons les longueurs OD, OD' sur Δ, Δ' égales à une même longueur l. Prenons deux autres tiges DE, D'E égales aussi à l et qui se joindront ponctuellement aux extrémités D, D' des premières. Nous relierons ensuite ponctuellement par une double articulation effectuée sur une sphère les tiges DE, D'E, de sorte que le point E où elles se joignent soit justement le centre de cette sphère et ensuite, en soudant cette sphère à un système articulé de Peaucellier, nous forcerons le point E à décrire la droite Oz. Dans ces conditions, l'égalité des triangles isocèles ODE, OD'E entraîne l'égale inclinaison des tiges Δ, Δ' sur l'axe Oz, et cela sans que les relations entre leurs azimuts se trouvent en quoi que ce soit altérées.

Lemme II. Soient T, T' deux tiges de longueurs a, a'.

La première s'articule en O sur le corps A de tout à l'heure, libre de tourner autour de Oz, et le plan d'articulation Π contient Oz, en sorte que l'axe D d'articulation est une droite du corps A perpendiculaire à Oz.

La tige T' s'articule avec la tige T à son extrémité, de sorte que le plan d'articulation soit le plan Π que nous venons de définir. Ainsi les tiges T et T' se meuvent toutes deux dans le plan Π, tandis que ce plan, solidaire du corps A, peut tourner autour de l'axe Oz en même temps que le corps.

Soient θ, θ' les angles avec Oz des tiges T, T' et φ l'angle que fait le plan Π avec un plan fixe zOx mené par Oz.

Je dis que si ρ, ρ', σ désignent des entiers positifs ou négatifs et λ, μ l'une des quantités 0, π, $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, on saura réaliser avec un système articulé le fait d'une tige T $(\rho, \rho', \lambda, \sigma, \mu)$ *faisant avec Oz l'angle $\rho\theta + \rho'\theta + \lambda$ et dont $\sigma\varphi + \mu$ sera l'azimut.*

En effet, nous saurons, d'après Kempe, réaliser le fait d'une tige $\Delta_{\rho,\rho',\lambda}$ articulée au point O, sur l'axe d'articulation D, avec le corps A (en sorte que Π est son plan d'articulation) et qui fasse avec Oz l'angle $\rho\theta + \rho'\theta' + \lambda$. Il suffira d'établir dans le plan π un système articulé convenable dont feraient partie les tiges T et T'. (Voir page 270.) Grâce à ce système, quand on déplacera T et T' de façon à faire varier d'une façon quelconque leurs angles θ, θ' avec Oz, la

tige $\Delta_{\rho,\rho',\lambda}$ se placera d'elle-même sous l'angle $\rho\theta + \rho'\theta' + \lambda$ avec l'axe Oz.

Imaginons un second corps $A_{\sigma,\mu}$ tournant aussi librement autour de Oz et articulons une tige $T(\rho, \rho', \lambda, \sigma, \mu)$ avec ce corps au point O, de sorte que son plan $\Pi_{\rho,\sigma}$ d'articulation passe par Oz.

D'après le lemme I, nous saurons, par le moyen d'un système articulé, qui reliera les axes $\Delta_{\rho,\rho',\lambda}$ et $T(\rho, \rho', \lambda, \sigma, \mu)$, obliger les axes à rester également inclinés sur l'axe Oz et cela sans toucher à la liberté relative de leurs azimuts qui sont ceux des plans Π et $\Pi_{\sigma,\mu}$. Alors $T(\rho, \rho', \lambda, \sigma, \mu)$ fera avec Oz l'angle $\rho\theta + \rho'\theta' + \lambda$.

Maintenant, passons aux azimuts, qui sont restés indépendants. Matérialisons en une tige Ω, solidaire du corps A, la trace du plan Π sur le plan des xy, et soit de même $\Omega_{\sigma,\mu}$ une tige solidaire du corps $A_{\sigma,\mu}$ représentant la trace sur le plan xOy du plan $\Pi_{\sigma,\mu}$. La tige Ω fait avec l'axe Ox l'angle φ; on pourra, grâce à un système articulé plan, obliger $\Omega_{\sigma,\mu}$ à faire avec Ox l'angle $\sigma\varphi + \mu$ (Kempe).

Dès lors, la tige $T(\rho, \rho', \lambda, \sigma, \mu)$ remplit les conditions angulaires de l'énoncé.

Son azimut est $\sigma\varphi + \mu$, et l'angle qu'elle fait avec Oz est $\rho\theta + \rho'\theta' + \lambda$.

Lemme III. Soit une tige AB; *on peut, au moyen d'un système articulé, réaliser le fait d'une tige* A'B' *équipollente à* AB *et dont l'origine* A' *peut être prise en un point quelconque fixe ou mobile de l'espace, sans gêner le mouvement de la tige* AB *si cette tige est mobile.*

En effet, concevons un corps C libre de tourner autour de AB, puis un corps C' articulé avec C, de sorte que l'axe d'articulation soit parallèle à AB, puis un troisième corps C″ articulé au corps C', l'axe d'articulation étant aussi parallèle à AB, on pourrait continuer si l'on voulait, mais arrêtons-nous au corps C″, et soit A_1B_1 un segment lié au corps C″ qui soit, dans une position de ce corps, équipollent à AB, il est clair que A_1B_1 sera équipollent à AB dans toutes les positions du corps C″. Imaginons alors que dans un plan Π lié invariablement au corps C″, on construise un parallélogramme articulé dont A_1B_1 serait un côté; on pourrait même construire une chaîne de parallélogrammes articulés dans le plan Π dont le premier aurait A_1B_1 pour côté et dont les autres auraient tous deux côtés équipollents à A_1B_1.

Le dernier de ces côtés dans le dernier de ces parallélogrammes est une tige A'B' qui demeure équipollente à AB, soit quand on fait

tourner les corps C, C′, C″, soit quand on déforme la chaîne des parallélogrammes articulés; or, il est bien évident que par ces mouvements combinés on pourra, quelle que soit la position du segment AB et sans gêner son mouvement, amener le point A′ en un point arbitraire de l'espace.

Lemme IV. Soient $T_1, T_2, \ldots, T_m$ m tiges s'articulant au point O sur m corps $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que nous supposerons susceptibles de tourner autour de Oz. Les plans d'articulation passeront tous par Oz et nous désignerons respectivement par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ les azimuts de ces plans et par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ les angles des tiges $T_1, T_2, \ldots, T_m$ avec Oz. Ces divers angles pourront être indépendants ou liés par certaines conditions physiquement réalisées, comme par exemple les tiges T $(\rho\rho'\lambda\sigma\mu)$ dans le lemme II.

Je me propose de prouver que *l'on peut réaliser par des systèmes articulés ce fait que la somme des projections des tiges* $T_1, T_2, \ldots, T_m$ *sur un axe, l'axe* Ox *par exemple, soit nulle.*

En effet, par l'emploi de systèmes articulés nous saurons guider une tige T'_1 équipollente à T_1 et dont l'origine soit sur un point fixe F [lemme III]. Nous saurons de même construire une tige T'_2 se joignant ponctuellement par son origine à l'extrémité de T'_1 et constamment équipollente à T_2; puis une tige T'_3 équipollente à T_3 et se joignant par son origine à l'extrémité de T'_2 et ainsi de suite.

Nous arriverons finalement à une dernière tige T'_m équipollente à T_m et dont on désignera par P l'extrémité.

La droite FP représente la somme géométrique des segments $T_1, T_2, \ldots, T_m$; pour que sa projection sur Ox soit nulle, il faut et il suffit que le point P décrive le plan mené par F perpendiculairement à Ox. Or, c'est ce que l'on saura réaliser en articulant ponctuellement la tige T'_m par le point P au point décrivant d'un planigraphe.

Le lemme est donc démontré.

Réalisation de toute liaison algébrique entre des points. Ces divers lemmes nous conduisent à une proposition générale qui s'énonce dans les termes suivants :

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *n points liés par une relation algébrique. On peut réaliser cette relation algébrique à l'aide d'un système articulé.*

Soient, en effet, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; ..., x_n, y_n, z_n les coordonnées rectangulaires des n points; la relation algébrique consi-

dérée se traduira par l'équation

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

où f est un polynôme en $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$.

Je me servirai de tiges T, T' comme dans les lemmes précédents. Ainsi M_i sera l'extrémité d'une tige T'_i articulée à l'extrémité d'une tige T_i qui s'articule elle-même en O à un corps A_i libre de tourner autour de Oz et le plan d'articulation Π_i contient à la fois l'axe Oz et les tiges T_i, T'_i. Une tige Ω_i, figurant un prolongement du corps A_i dans le plan xOy, matérialise la trace du plan Π_i sur ce plan; φ_i est l'angle de Ω_i avec Ox; θ_i, θ'_i les angles de T_i, T'_i avec Oz; enfin si a_i, a'_i sont les longueurs des deux tiges, on a pour les coordonnées du point M_i,

$$\begin{aligned} x_i &= (a_i \sin\theta_i + a'_i \sin\theta'_i)\cos\varphi_i,\\ y_i &= (a_i \sin\theta_i + a'_i \sin\theta'_i)\sin\varphi_i,\\ z_i &= a_i\cos\theta_i + a'_i\cos\theta'_i. \end{aligned}$$

La relation algébrique prendra alors la forme

$$0 = \sum A \sin^{p_1}\theta_1 \ldots \sin^{p_n}\theta_n \sin^{p'_1}\theta'_1 \ldots \sin^{p'_n}\theta'_n \cos^{q_1}\theta_1 \ldots \cos^{q_n}\theta_n \cos^{q'_1}\theta'_1 \ldots \cos^{q'_n}\theta'_n \sin^{r_1}\varphi_1 \ldots \sin^{r_n}\varphi_n \cos^{s_1}\varphi_1 \ldots \cos^{s_n}\varphi_n.$$

Or, en faisant usage d'une transformation déjà utilisée dans le théorème de Kempe, nous mettrons cette équation sous la forme

$$\text{(E)}\quad 0 = \sum \mathcal{A}\begin{bmatrix} \rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_n\,\lambda \\ \rho'_1\,\rho'_2 \ldots \rho'_n \\ \sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_n\,\mu \end{bmatrix} \sin(\Sigma\rho_i\theta_i + \Sigma\rho'_i\theta'_i + \lambda)\cos(\Sigma\sigma_i\varphi_i + \mu),$$

où $\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_n, \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont des entiers positifs ou négatifs et λ, μ les quantités $0, \pi, +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$; quant au coefficient $\mathcal{A}\begin{bmatrix} \rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_n\,\lambda \\ \rho'_1\,\rho'_2 \ldots \rho'_n \\ \sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_n\,\mu \end{bmatrix}$, il est essentiellement positif.

Nous allons maintenant considérer un plan Π passant par Oz, plan qui sera lié invariablement à un corps A auxiliaire libre de tourner autour de cet axe.

Nous articulerons en O sur ce corps A et dans le plan Π, pris comme plan commun d'articulation, n tiges $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, que nous assujettirons, par le procédé du lemme I, à faire avec Oz les mêmes angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ que $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Après avoir construit les parallélogrammes sur T_1, T'_1, T_2, T'_2, ... articulés respectivement dans les plans Π_1, Π_2, ..., Π_n, ce qui nous donne les tiges T''_1, T''_2, ..., T''_n équipollentes à T'_1, T'_2, ..., T'_n, mais articulées en O aux corps A_1, A_2, ..., A_n respectivement, nous pourrons guider dans le plan Π n autres tiges Δ'_1, Δ'_2, ..., Δ'_n articulées en O au corps A et faisant avec Oz les mêmes angles θ'_1, θ'_2, ..., θ'_n que T''_1, T''_2, ..., T''_n ou que T'_1, T'_2, ..., T'_n.

Nous saurons alors, par le moyen d'un multiplicateur et additeur de Kempe, guider dans le plan Π une tige $\Delta\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n\end{pmatrix}$ faisant avec Oz l'angle $\Sigma\rho_i\theta_i + \Sigma\rho'_i\theta'_i + \lambda$.

Considérons maintenant un corps $A\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ mobile autour de l'axe Oz et dont nous représenterons par $\Omega\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ un prolongement en forme de tige situé dans le plan des xy, en sorte que cette tige matérialise la trace sur le plan des xy d'un plan $\Pi\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ lié invariablement au corps et passant par Oz; dans ce plan $\Pi\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ articulons en O une tige $T\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ sur le corps $A\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$; on pourra, en application du lemme I, relier cette tige avec la tige

$$\Delta\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix},$$

de sorte que les inclinaisons de ces tiges sur Oz demeurent égales.

On pourra ensuite, par des additeurs et des multiplicateurs, relier la tige $\Omega\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \lambda\\ \rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n,\\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ aux tiges Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n de façon qu'elle fasse avec Ox l'angle $\Sigma\sigma_i\varphi_i + \mu$.

Dans ces conditions, la tige $T\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \lambda \\ \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n, \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ fait avec Oz l'angle $\Sigma\rho_i\theta_i + \Sigma\rho'_i\theta'_i + \lambda$, tandis que son azimut est égal à $\Sigma\rho_i\varphi_i + \mu$. Si l'on donne à cette tige la longueur $\mathcal{A}\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \lambda \\ \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n, \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ l'équation (E) exprime que la somme des projections de toutes ces tiges sur Ox est nulle.

On est alors conduit à appliquer le lemme IV. Par des articulations on guidera un polygone articulé formé de tiges équipollentes aux tiges $T\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \lambda \\ \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n, \\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \mu\end{pmatrix}$ et l'origine F de la première tige de ce polygone étant maintenue fixe, il sera nécessaire et suffisant que l'extrémité de la dernière décrive le plan normal à l'axe Ox mené par le point F, ce que l'on réalisera au moyen d'un planigraphe.

Le théorème est démontré.

Cas de plusieurs équations.

Si la condition géométrique imposée à l'ensemble des points M_1, M_2, ... se traduit par plusieurs équations entre leurs coordonnées, chacune de ces équations se trouve représentée par un système articulé. Il suffira de joindre ponctuellement entre eux ces divers systèmes aux points M_1, M_2, ... pour que ces points se trouvent être assujettis à la fois à l'ensemble des conditions exprimées par les équations proposées. Le théorème est donc acquis quel que soit le nombre des équations de condition.

Description des surfaces et des courbes algébriques gauches.

Plusieurs cas particuliers de cette proposition sont dignes d'une mention spéciale.

D'abord s'il s'agit d'une condition unique imposée aux coordonnées d'un seul point M, ce point décrit une surface algébrique, et l'on a alors ce théorème :

Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé.

Si l'on a deux équations algébriques entre les coordonnées d'un point unique, ce point décrit une courbe gauche algébrique. Donc :

Toute courbe gauche algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé.

Mouvements algébriques.

On peut se rendre compte aussi qu'il n'est point de mouvement algébrique d'un corps qui ne puisse être réalisé au moyen de simples articulations.

Observons, en effet, que la position d'un corps solide est connue si l'on connaît celle de trois de ses points.

Une condition algébrique imposée au mouvement relatif de deux corps se traduira par une ou plusieurs relations algébriques entre les coordonnées de trois points liés à l'un et de trois points liés à l'autre. Donc, tout état de gêne, représenté par des conditions algébriques, existant entre deux corps est réalisable par le moyen d'un système articulé.

De même, s'il s'agit d'un système de corps solides.

Les mêmes remarques s'étendent à des conditions plus abstraites.

Considérons deux points qui soient constamment conjugués par rapport à une surface du second degré. Il existera un système articulé qui réalisera cette relation.

Pareillement si la droite de jonction de deux points P, Q fait partie d'un complexe donné, algébrique, il y aura un système articulé qui assujettira le segment PQ à cette condition.

Les transformations géométriques algébriques sont dans le même cas. Il y a, par exemple, des systèmes articulés qui réalisent l'homographie la plus générale. Nous avons eu occasion de donner à la page 264 un cas particulier, celui de l'homothétie jointe à un déplacement [1].

Il est clair que l'introduction de simples articulations ne peut fournir que des liaisons de nature algébrique, c'est-à-dire se traduisant par des quantités algébriques entre les lignes ou les lignes trigonométriques des angles des figures assujetties à ces liaisons. Des relations de nature transcendante ne sauraient être réalisées par leur moyen.

Mais il était permis de se demander si les systèmes articulés fournissent réellement le moyen d'établir TOUTES les liaisons algébriques concevables ou bien si les liaisons qu'ils permettent d'établir ne forment pas une classe particulière dans l'ensemble des liaisons algébriques.

---

(1) Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (novembre 1895), M. Delaunay a fait connaître un système articulé propre à réaliser la projection orthogonale.

Le raisonnement tiré du nombre suffisant des paramètres, que permet d'augmenter à volonté l'addition de nouveaux corps et de nouvelles articulations, ne saurait passer pour satisfaisant. Dans l'article des *Nouvelles Annales*, où M. le général Paucellier a publié sa belle découverte de l'appareil à ligne droite, l'auteur fait remarquer que le nombre des paramètres dont on dispose dans un système articulé plan peut être aussi grand que l'on veut, pourvu que l'on complique suffisamment le système, et il en déduit que l'on pourra toujours, grâce à ce nombre indéterminé de paramètres, faire en sorte qu'un point du système décrive un arc de courbe algébrique donné *a priori*.

Cette remarque rend probable le théorème, mais elle laisse subsister ce doute que les courbes qui naissent du mouvement d'un système articulé sont peut-être marquées d'un caractère particulier.

Il n'en est rien, c'est vrai, mais la démonstration de Kempe était nécessaire pour le mettre hors de doute. Ainsi en est-il des théorèmes plus généraux que nous venons de démontrer.

Pour finir, une réflexion concernant les systèmes articulés. L'intérêt qui s'attache à leur étude n'est point justifiable *a priori*. Des avantages de précision, de facilité de construction, de légèreté, de mobilité en ont rendu l'emploi précieux aux praticiens. Leur usage dans les machines est indispensable; on les rencontre dans les mécanismes les plus primitifs, comme aussi dans les plus modernes; aussi est-il permis de prédire à leur théorie un développement incessant. Jusqu'à ce jour, on ne peut dire qu'elle ait été poussée très loin, malgré les travaux si ingénieux de Tchebicheff et de tant d'autres géomètres. Les principes généraux de la théorie des systèmes articulés n'ont pas encore été éclaircis et on est réduit à un ensemble de recherches isolées et de résultats curieux sans liens apparents entre eux. C'est une raison de plus pour engager les géomètres à éclairer cette question encore obscure; les progrès de la science se font parfois par les côtés les plus inattendus.

CHAPITRE XII

Le déplacement comme cas particulier d'homographie.

Glissement d'une droite sur elle-même.

100. Les transformations homographiques comprennent les déplacements comme cas particuliers. Prenons d'abord l'exemple d'une droite qui glisse sur elle-même d'une longueur a. Soit Π un plan normal à cette droite et x la distance, avant le glissement, d'un point M de la droite au plan fixe Π. Après le glissement, le point M se sera éloigné de la quantité a et la distance x_1 de sa nouvelle position M_1 au plan Π sera devenue

$$x_1 = x + a. \tag{1}$$

Le point M_1 est ainsi, sur la droite considérée, l'homologue du point M dans l'homographie particulière représentée par la formule (1).

Cette homographie est particulière, car, en général, dans une homographie reliant les points d'une droite, il y a deux points de coïncidence, c'est-à-dire qui coïncident avec leurs homologues.

Pour certaines homographies spéciales, ces points de coïncidence sont confondus. C'est ce qui a lieu ici, car l'unique point de coïncidence est le point à l'infini sur la droite.

Identité des formules qui représentent un déplacement avec celles d'un changement de coordonnées.

Mouvement d'une figure plane.

101. Examinons le cas du déplacement d'une figure plane dans son propre plan.

Soient O_1x_1, O_1y_1 deux axes rectangulaires fixes; M un point de

la figure mobile et M_1 la position qu'occupe le point M après le déplacement. La correspondance entre les points M et M_1 est une homographie.

On s'en rend compte de la façon suivante. Imaginons deux axes rectangulaires liés à la figure mobile et coïncidant avec O_1x_1, O_1y_1 avant le déplacement.

Après ce déplacement, ces axes sont venus occuper une certaine position Ox, Oy. Les coordonnées x, y du point M par rapport aux axes O_1x_1, O_1y_1 sont évidemment les mêmes que les coordonnées du point M_1 par rapport aux axes Ox, Oy, attendu que ces axes et le point M_1 sont liés invariablement entre eux.

Si donc nous désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point M_1 par rapport aux axes O_1x_1, O_1y_1, on voit que x_1, y_1 devront se déduire de x, y par les formules d'un changement de coordonnées, puisque (x_1, y_1) (x, y) sont les coordonnées d'un même point M_1 par rapport à deux systèmes d'axes différents (O_1x_1, O_1y_1) et (Ox, Oy). Nous aurons ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = a + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = b + x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Si nous remplaçons x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, et x_1, y_1 par $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ nous pourrons remplacer les formules (2) par les suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = \cos\theta.x - \sin\theta.y + az, \\ \rho y_1 = \sin\theta.x + \cos\theta.y + bz, \\ \rho z_1 = z, \end{cases}$$

où ρ est un coefficient de proportionnalité.

102. Ces formules rentrent évidemment dans le type général suivant :

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = lx + my + nz, \\ \rho y_1 = l'x + m'y + n'z, \\ \rho z_1 = l''x + m''y + n''z, \end{cases}$$

où l, m, n, l', m', n', l'', m'', n'' sont des constantes, et qui convient à la transformation homographique la plus générale du plan.

Points de coïncidence d'une homographie.

Il y a généralement 3 points qui, dans une homographie plane donnée, coïncident avec leurs homologues. Si, en effet, dans les for-

mules (4) on exprime que x_1, y_1, z_1 sont proportionnels à x, y, z, on est conduit aux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} Sx = lx + my + nz, \\ Sy = l'x + m'y + n'z, \\ Sz = l''x + m''y + n''z, \end{cases}$$

dont la compatibilité exige que le déterminant suivant soit nul

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} l - S & m & n \\ l' & m' - S & n' \\ l'' & m'' & n'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Équation caractéristique

Cette équation du troisième degré en S est appelée l'*équation caractéristique* de l'homographie.

Les racines de l'équation caractéristique présentent vis-à-vis d'une transformation linéaire, équivalente, comme on sait, à une transformation de coordonnées, la propriété d'invariance.

Supposons, en effet, que les formules de transformation s'écrivent

$$(7) \qquad \begin{cases} X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

en sorte que l'on tire de ces équations

$$(7)' \qquad \begin{cases} x = \dfrac{AX + A'Y + A''Z}{\Delta}, \quad y = \dfrac{BX + B'Y + B''Z}{\Delta}, \\ z = \dfrac{CX + C'Y + C''Z}{\Delta}, \end{cases}$$

où Δ est le déterminant $\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma''$ et A, B, C, ... ses mineurs.

Les formules (4), qui représentent l'homographie, vont se transformer dans les suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} \rho X_1 = LX + MY + NZ, \\ \rho Y_1 = L'X + M'Y + N'Z, \\ \rho Z_1 = L''X + M''Y + N''Z, \end{cases}$$

où X_1, Y_1, Z_1 ont les expressions suivantes, qui se déduisent de (7) en remplaçant x, y, z par x_1, y_1, z_1,

$$\begin{cases} X_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \\ Y_1 = \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \\ Z_1 = \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1. \end{cases}$$

Or, de la première de ces équations on tire, en tenant compte des équations (4) et (8),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \rho X_1 &= \alpha\,(lx + my + nz) + \beta\,(l'x + m'y + n'z) \\ &\qquad + \gamma\,(l''x + m''y + n''z) = LX + MY + NZ, \\ \rho Y_1 &= \alpha'\,(lx + my + nz) + \beta'\,(l'x + m'y + n'z) \\ &\qquad + \gamma'\,(l''x + m''y + n''z) = L'X + M'Y + N'Z, \\ \rho Z_1 &= \alpha''\,(lx + my + nz) + \beta''\,(l'x + m'y + n'z) \\ &\qquad + \gamma''\,(l''x + m''y + n''z) = L''X + M''Y + N''Z. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces identités, si l'on y remplace x, y, z par leurs valeurs (7)', on aura aisément les constantes L, M, N, L', M', N', L'', M'', N''. Mais ces identités vont nous suffire.

Des équations (5) on tire, en effet, en les ajoutant après les avoir multipliées par α, β, γ,

$$S\,(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha\,(lx + my + nz) + \beta\,(l'x + m'y + n'z) \\ + \gamma\,(l''x + m''y + n''z),$$

ou d'après la première identité (9) et la première des équations (7)

$$SX = LX + MY + NZ,$$

et de même

$$SY = L'X + M'Y + N'Z,$$
$$SZ = L''X + M''Y + N''Z.$$

Telles sont les équations transformées des équations (5). On en déduit que S, qui est racine de l'équation (6), est aussi racine de l'équation

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} L - S & M & N \\ L' & M' - S & N' \\ L'' & M'' & N'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation caractéristique avec les nouvelles variables X, Y, Z. On voit par ce qui précède que cette équation a les mêmes racines que l'équation (6), pourvu que l'on y prenne pour L, M, N, L', M', N', L'', M'', N'' les valeurs constantes qui se prêtent aux identités (9). Si l'on multiplie ces coefficients par une même constante k, il est clair que les équations (8) introduisent dans X_1, Y_1, Z_1 un même facteur; l'homographie n'est pas altérée, mais les racines de l'équation (10) sont alors multipliées par k. Il convient de remarquer que les quotients de ces racines demeurent en

tous cas invariables. Si, par exemple, une racine est double, un de ces quotients sera égal à l'unité dans (6) et par conséquent aussi dans (10), quand même on aurait multiplié L, M, N, ... par un même nombre; le fait d'une racine double est donc indépendant des coordonnées et de l'introduction d'un facteur dans les coefficients L, M, N, ...; de même pour une racine triple.

Cette remarque préalable relative à l'invariance des rapports des racines de l'équation caractéristique permet de simplifier notablement l'exposition de la réduction des homographies à leurs types canoniques.

On doit encore observer que le système des équations (5) en x, y, z ne se réduit jamais à *une seule* équation si S est une racine simple de (6).

Si, en effet, les équations (5) se réduisent à une seule, les mineurs de (6) sont nuls identiquement pour la valeur correspondante de S. Or, la dérivée du déterminant (6) est une fonction linéaire homogène de ses mineurs. Donc, s'ils étaient tous seuls, la dérivée serait nulle et S serait racine multiple.

Ajoutons enfin que l'équation (6) ne saurait admettre une racine nulle, car alors le déterminant des équations (4) serait nul et nous ne pourrions plus résoudre ces équations par rapport à x, y, z en x_1, y_1, z_1; nous n'aurions plus une transformation homographique.

Discussion des homographies planes.

Ceci étant posé, supposons d'abord que l'équation caractéristique n'ait que des racines simples. Les équations (5) font correspondre à chacune d'elles un point différent, ce qui fait en tout trois points P_1, P_2, P_3, possédant la propriété de coïncider avec leur homologue. Nous allons montrer que ces points forment un triangle ou que le point P_3 ne peut être sur la droite P_1P_2.

En effet, l'homologue d'une droite joignant deux points s'obtient en joignant par une droite les homologues de ces deux points. Ici donc la droite P_1P_2 est sa propre homologue, en sorte que si M décrit cette droite, son homologue M' la décrit aussi; de plus M et M' se correspondent homographiquement. Or, on sait que dans toute homographie qui ne se réduit pas à une identité (nous entendons par là le cas limite où tout point M serait son propre homologue sur la droite considérée), il y a seulement deux points de coïncidence possibles; or, P_1, P_2 sont ces deux points; donc, comme P_3 se corres-

pond à lui-même dans l'homographie plane, il ne peut être sur la droite P_1P_2.

Puisque P_1, P_2, P_3 forment un triangle, on peut, par une transformation telle que (7), le prendre comme triangle de référence; les équations de l'homographie prendront la forme (8). Seulement, comme X_1 doit s'annuler avec X, Y_1, avec Y et Z_1, avec Z, attendu que les côtés du triangle de référence se correspondent à eux-mêmes, on voit que les formules (8) se réduisent à la forme

$$(\text{A}) \qquad \rho X_1 = LX, \quad \rho Y_1 = M'Y, \quad \rho Z_1 = N''Z.$$

Telle est la forme canonique que peut recevoir l'homographie plane la plus générale.

Cas d'une racine double.

Passons au cas où l'équation (6) aurait une racine multiple.

Dans tous les cas, à cette racine multiple il correspond au moins un point P_1 qui coïncide avec son homologue. Les droites issues de P_1 ont pour homologues des droites issues de P_1, et la correspondance entre ces droites étant homographique, il existe *au moins une* droite issue de P_1 qui coïncide avec son homologue. On prendra cette droite pour côté $Z = 0$ du triangle de référence et pour $Y = 0$ une autre droite issue de P_1, le troisième côté $X = 0$ restant arbitraire. Alors les formules (8) devront être telles que le côté $Z = 0$ se corresponde à lui-même ainsi que le point $Y = 0$, $Z = 0$. Cela nous donne $L' = L'' = M'' = 0$, en sorte qu'il reste

$$(11) \qquad \begin{cases} \rho X_1 = LX + MY + NZ, \\ \rho Y_1 = \phantom{LX + {}} M'Y + N'Z, \\ \rho Z_1 = \phantom{LX + M'Y + {}} N''Z. \end{cases}$$

Le système (5) devient ici

$$(12) \qquad \begin{cases} (L - S)X + MY + NZ = 0, \\ (M' - S)Y + N'Z = 0, \\ (N'' - S)Z = 0, \end{cases}$$

en sorte que l'équation (6) s'écrit

$$(13) \qquad (L - S)(M' - S)(N'' - S) = 0.$$

Supposons maintenant que $S = L = M'$ soit racine double et $S = N''$ racine simple.

Il y a, outre le côté $Z = 0$ du triangle de référence, une droite

issue de P_1 qui coïncide avec son homologue. On tire, en effet, des formules (12) la relation

$$\rho\left[Y_1 + \frac{N'}{M' - N'} Z_1\right] = M'\left[Y + \frac{N'}{M' - N'} Z\right];$$

ce qui prouve que la droite

$$Y + \frac{N'}{M' - N'} Z = 0$$

se correspond à elle-même.

On peut supposer que l'on a pris pour $Y = 0$ cette droite même, ce qui revient à supposer $N' = 0$.

Enfin, on peut supposer que l'axe $X = 0$ passe par le point de coïncidence P_2, autre que P_1 et qui correspond à la racine simple N''. Pour $S = N''$ les équations (12) deviennent, en se souvenant que $N' = 0$,

$$(L - N'')X + MY + NZ = 0,$$
$$(M' - N'')Y = 0.$$

Pour que $X = 0$ soit une solution, il faut et il suffit que $N = 0$. Ainsi avec ce choix du triangle de coordonnées les équations de l'homographie deviennent

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \rho X_1 = LX + MY, \\ \rho Y_1 = LY, \\ \rho Z_1 = N''Z. \end{cases}$$

Cas singulier de l'homologie. Tant que M n'est pas nul, les équations (11) ne sont indéterminées ni pour $S = L$, ni pour $S = N''$. Mais si $M = 0$, les équations sont indéterminées pour $S = L$, en sorte que dans l'homographie

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \rho X_1 = LX, \\ \rho Y_1 = LY, \\ \rho Z_1 = N''Z, \end{cases}$$

tous les points de la droite $Z = 0$ se correspondent à eux-mêmes; de plus, toutes les droites issues du point $X = 0$, $Y = 0$ se correspondent à elles-mêmes. L'homographie du type (C) n'est autre que l'*homologie*.

Le cas où l'on aurait $L = N''$ et où M' serait la racine simple conduit aux mêmes conséquences et avec des notations différentes.

Cas de la racine triple.

Reste le cas où la racine L est triple.

Nos formules ont le type (11), seulement on a $L = M' = N'$.

En sorte que les formules s'écrivent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X_1 &= LX + MY + NZ,\\ \rho Y_1 &= LY + N'Z,\\ \rho Z_1 &= LZ.\end{aligned}\right.$$

Faisons le changement de variables

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z,\\ Y' &= \lambda Y + \mu Z,\\ Z' &= Z,\end{aligned}\right.$$

on aura

$$\begin{aligned}
\rho Z'_1 &= \rho Z_1 = LZ\\
\rho Y'_1 &= \rho\lambda Y_1 + \rho\mu Z_1 = \lambda\,[LY + N'Z] + \mu LZ\\
&= LY' + \lambda N'Z'\\
\rho X'_1 &= \rho\alpha X_1 + \rho\beta Y_1 + \rho\gamma Z_1 = L\,(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\\
&\qquad + M\alpha.Y + (N\alpha + N'\beta)\,Z\\
&= LX' + \frac{M\alpha}{\lambda}(Y' - \mu Z') + (N\alpha + N'\beta)\,Z'\\
&= LX' + \frac{M\alpha}{\lambda}Y' + \left[N\alpha + N'\beta - \frac{\alpha\mu}{\lambda}M\right]Z'.
\end{aligned}$$

Il faut, pour que la transformation de coordonnées (15) soit légitime, que le déterminant de la substitution, $\lambda\alpha$, soit différent de zéro. Mais en général, on pourra choisir α, β, λ, μ ($\lambda\alpha$ étant différent de zéro), de sorte que l'on ait

$$(N\alpha + N'\beta)\,\lambda - \alpha\mu M = 0.$$

Il n'y aurait exception que si M et N′ étaient nuls en même temps. Ce cas mis à part, on voit qu'on peut toujours supposer que $N = 0$, et alors les formules deviennent

$$(D)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X_1 &= LX + MY,\\ \rho Y_1 &= LY + N'Z,\\ \rho Z_1 &= LZ.\end{aligned}\right.$$

Homologie singulière.

Si M et N′ s'étaient trouvés nuls, on aurait la forme

$$(E)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X_1 &= LX + NZ,\\ \rho Y_1 &= LY,\\ \rho Z_1 &= LZ.\end{aligned}\right.$$

Mais ce cas rentre dans le cas (D) où l'un des coefficients M ou N' serait nul.

Ce cas (E) rentre aussi dans le cas (B) où l'on supposerait $N' = L$.

Le cas (E) est donc un cas limite de l'homologie.

On voit, en effet, que tous les points de la droite $Z = 0$ se correspondent à eux-mêmes et que deux points homologues quelconques sont constamment alignés sur le point $Y = 0$, $Z = 0$. Nous sommes donc *dans ce cas d'homologie où le centre d'homologie est situé sur l'axe d'homologie.*

Translation.

Si cet axe est rejeté à l'infini, toutes les droites homologues sont parallèles et toutes les droites de jonction des points homologues sont parallèles entre elles.

Soient dès lors (M, M')(N, N') deux couples de points homologues; les droites MM' et NN' sont parallèles; les droites MN et M'N', qui sont homologues, sont également parallèles et par suite la figure MM'N'N est un parallélogramme. Il en résulte que les côtés opposés MM' et NN' sont égaux. On voit donc que l'on construira l'homologue N' d'un point quelconque N en construisant le segment NN' équipollent au segment fixe MM'; l'homographie consiste ainsi, dans ce cas, en une simple *translation*.

La réciproque est évidente, toute translation est une homologie dont l'axe et le centre sont rejetés à l'infini.

Cas d'un déplacement quelconque.

103. Nous allons maintenant montrer que tout déplacement qui ne se réduit pas à une translation est une homographie du type général.

Prenons, en effet, les formules (3) qui définissent en coordonnées homogènes un déplacement quelconque.

Si l'on cherche les points de coïncidence, on sera conduit aux équations

$$(16)\begin{cases}(\cos\theta - S)x - \sin\theta . y + az = 0, \quad \sin\theta . x + (\cos\theta - S)y + bz = 0\\ (1 - S)\, z = 0,\end{cases}$$

et l'équation caractéristique s'écrit

$$(1 - S)\,[(S - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 0.$$

La racine $S = 1$ est simple tant que θ est différent de zéro, mais si $\theta = 0$, on est dans le cas d'une simple translation, que nous venons d'étudier.

Si donc θ n'est pas nul, les formules (16) nous donneront pour $S = 1$ un point à distance finie qui coïncide avec son homologue. C'est le point autour duquel il suffit de faire tourner la figure pour l'amener d'une position dans l'autre. On sait, du reste, que θ est l'angle de rotation.

Prenons maintenant les deux autres racines

$$S = \cos\theta \pm i \sin\theta = e^{\pm i\theta},$$

qui ne seront égales, le cas de $\theta = 0$ exclu, que si $\theta = \pi$.

Les équations (16) nous donnent alors $z = 0$, ce qui prouve que les deux autres points doubles sont à l'infini.

Supposons que θ ne soit pas égal à π; alors les deux autres équations se réduisent à

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos\theta - S}{\sin\theta} = \pm i,$$

les deux points de coïncidence sont donc les points circulaires à l'infini. Ainsi un déplacement plan est une homographie dans laquelle les points circulaires à l'infini sont chacun leur propre homologue.

On observera que dans le cas actuel $S_1 = 1$, $S_2 = e^{i\theta}$, $S_3 = e^{-i\theta}$ sont les trois racines de l'équation caractéristique. Or, considérons d'une façon générale une homographie rapportée à son triangle $P_1 P_2 P_3$, dont les sommets sont les points de coïncidence.

Si S_1, S_2, S_3 sont les trois racines de l'équation caractéristique, les équations canoniques de l'homographie s'écrivent, comme on le constate sans peine d'après la propriété d'invariance,

$$\left\{\begin{aligned} \rho X_1 &= S_1 . X, \\ \rho Y_1 &= S_2 . Y, \\ \rho Z_1 &= S_3 . Z. \end{aligned}\right.$$

Considérons la droite $Y = \lambda Z$ issue du sommet P_1 $(Y = 0, Z = 0)$, on a identiquement

$$\rho \left(Y_1 - \frac{S_2}{S_3} \lambda Z_1 \right) = S_2 (Y - \lambda Z),$$

ce qui prouve que la droite $Y - \lambda \frac{S_2}{S_3} Z = 0$ est l'homologue de la première. Elle est avec elle en correspondance homographique et

P_1P_2, P_1P_3 sont les rayons doubles de cette homographie, le rapport anharmonique de ces deux droites homologues et des deux rayons doubles doit être constant; il est, en effet, égal à $\frac{S_2}{S_3}$. Ainsi $\frac{S_2}{S_3}$ est la valeur du rapport anharmonique P_1 (D′, D, P_2, P_3) de deux droites homologues D, D′ issues de P_1 avec les droites doubles également issues de P_1.

Conception projective des angles.

Appliquons ceci au cas du déplacement; nous considérerons une droite D issue du point double P_1 situé à distance finie et l'homologue D′ de D, qui est aussi issue de P_1 et fait avec D_1 l'angle θ; $\frac{S_2}{S_3}$ sera le rapport anharmonique ρ que forment D′ et D avec les droites isotropes issues de P_1.

Or, on a trouvé $S_2 = e^{i\theta}$, $S_3 = e^{-i\theta}$, donc $\frac{S_2}{S_3} = e^{2i\theta}$, d'où

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\rho. \tag{17}$$

On retrouve ainsi la définition projective, due à Laguerre, de l'angle de deux droites : *c'est le quotient par $2i$ du logarithme népérien du rapport anharmonique que forment ces droites avec les droites isotropes issues de leur point de concours.*

Symétrie par rapport à un point.

Lorsque l'angle θ est égal à π, l'équation caractéristique admet la racine double -1. Mais alors le système des équations (16) se réduit à $z = 0$. Chaque point de la droite de l'infini se correspond à lui-même; nous sommes dans un cas particulier d'homologie, celui où cette transformation se réduit à une symétrie par rapport à un point fixe. Ici encore, du reste, les points circulaires à l'infini sont leurs propres homologues comme tous les autres points de la droite de l'infini.

Remarque.

Nous terminerons par une dernière remarque.

Dans tout déplacement qui ne se réduit pas à une translation, les cercles qui ont leur centre au point de coïncidence sont leurs propres homologues.

Or, une homographie, en général, ne possède pas la propriété de transformer aucune conique en elle-même.

En fait, les trois racines de l'équation caractéristique sont ici 1, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$; cette équation est donc *réciproque*. C'est là un cas particulier d'une proposition plus générale établie par M. Camille Jordan dans

un beau mémoire inséré dans le *Journal de mathématiques*, tome IV, série IV, sous ce titre : *Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même.*

Dans le cas d'une translation, les cercles se réduisent à des droites parallèles à la translation.

Déplacement d'une figure dans l'espace.

104. Nous venons de voir que tout déplacement d'une figure dans un plan est une homographie du type général, dont l'équation caractéristique est réciproque.

Dans le cas d'un déplacement dans l'espace, il n'en est pas tout à fait de même.

L'équation caractéristique, qui est alors du quatrième degré, possède toujours, s'il s'agit d'un déplacement, une racine multiple.

D'abord, un raisonnement analogue à celui du n° 101 nous prouvera l'identité de la représentation analytique d'un déplacement avec les formules ordinaires de la transformation des coordonnées.

Soient, en effet, T_1 un trièdre fixe et x, y, z les coordonnées, par rapport à T_1, d'un point M d'une figure dans une première position. Après un déplacement de la figure, le point M occupe une position M_1 dont x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées.

Imaginons un trièdre lié à la figure, qui coïncide avec T_1 dans la première position et qui soit venu dans la position T après le déplacement. Comme le point M est lié invariablement à ce trièdre, les coordonnées de M_1 par rapport au trièdre T seront les mêmes que les coordonnées de M par rapport à T_1, c'est-à-dire x, y, z. Ainsi x, y, z et x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un même point M_1 par rapport aux trièdres T et T_1; on passera donc des unes aux autres par les formules ordinaires de transformation des coordonnées

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\\ y_1 &= b + \beta x + \beta' y + \beta'' z,\\ z_1 &= c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z.\end{aligned}\right.$$

Observons de plus que puisque T coïncidait originairement avec T_1, savoir Ox avec O_1x_1, Oy avec O_1y_1, Oz avec O_1z_1, le déter-

minant

$$\begin{vmatrix} \alpha\ \alpha'\ \alpha'' \\ \beta\ \beta'\ \beta'' \\ \gamma\ \gamma'\ \gamma'' \end{vmatrix} = +1$$

est égal à + 1.

Par l'introduction de variables homogènes on peut écrire les équations (18) sous la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + a t, \\ \rho y_1 = \beta x + \beta' y + \beta'' z + b t, \\ \rho z_1 = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + c t, \qquad \rho t_1 = t. \end{cases}$$

Remarques générales sur l'homographie dans l'espace.

105. Ces formules rentrent dans le cas plus général d'une transformation homographique de l'espace.

$$(20)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = l x + m y + n z + p t, \\ \rho y_1 = l' x + m' y + n' z + p' t, \\ \rho z_1 = l'' x + m'' y + n'' z + p'' t, \\ \rho t_1 = l''' x + m''' y + n''' z + p''' t, \end{cases}$$

Si l'on cherche, comme on a fait pour le plan, les points de coïncidence, on se trouve amené aux équations

$$(21)\qquad \begin{cases} (l - S)\, x + m y + n z + p t = 0, \\ l' x + (m' - S)\, y + n' z + p' t = 0, \\ l'' x + m'' y + (n'' - S)\, z + p'' t = 0, \\ l''' x + m''' y + n''' z + (p''' - S)\, t = 0 \end{cases}$$

dont la compatibilité exige que S soit racine de l'équation du quatrième degré

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} l - S & m & n & p \\ l' & m' - S & n' & p' \\ l'' & m'' & n'' - S & p'' \\ l''' & m''' & n''' & p''' - S \end{vmatrix} = 0,$$

qui reçoit ici encore le nom d'équation caractéristique.

On démontrerait encore que les quotients des racines sont des invariants absolus, indépendants des coordonnées, indépendants aussi d'un facteur par lequel on multiplierait les coefficients l, m, n, ... dans les formules (20).

Il y a généralement quatre points de coïncidence ou points doubles et la discussion, ainsi que la réduction aux formes canoniques s'ef-

fectuent par les mêmes procédés que nous avons employés plus haut pour le cas de trois variables.

L'équation caractéristique peut avoir ses quatre racines inégales : une racine double, deux racines doubles, une racine triple, une racine quadruple.

Ces divers cas donnent lieu aux diverses classes d'homographies dans l'espace à trois dimensions.

Cas particulier d'un déplacement.

Appliquons ceci aux formules (18) où il faut se souvenir que $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ vérifient les relations connues qui équivalent à l'identité

$$(23)\quad (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)^2 + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)^2 + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

avec

$$(24)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1.$$

On sait que, dans ces conditions, tout terme du déterminant (24) est égal au mineur correspondant.

L'équation caractéristique s'écrit alors

$$(1 - S) \begin{vmatrix} \alpha - S & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' - S & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Or, le déterminant se développe ainsi

$$-S^3 + (\alpha + \beta' + \gamma'') S^2 - [(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'') + (\alpha\beta' - \beta\alpha')] S + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

et en se souvenant que $\alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$, ... et que le déterminant des neuf cosinus est égal à $+1$, on voit que le déterminant s'écrit

$$-S^3 + (\alpha + \beta' + \gamma'') S^2 - (\alpha + \beta' + \gamma'') S + 1,$$

et, par conséquent, l'équation caractéristique sera

$$(25)\quad (S - 1)^2 [S^2 - (\alpha + \beta' + \gamma'') S + 1] = 0.$$

On voit qu'elle a toujours *deux racines égales* à $+1$.

Si nous formons d'autre part les équations (21), nous trouvons

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{r} (\alpha - S)x + \alpha' y + \alpha'' z + at = 0, \\ \beta x + (\beta' - S)y + \beta'' z + bt = 0, \\ \gamma x + \gamma' y + (\gamma'' - S)z + ct = 0. \\ (S - 1)\, t = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on prend $S = 1$, la dernière équation devient une identité et les trois premières donnent en résolvant :

$$(27)\quad \frac{x}{\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & a \\ \beta' - 1 & \beta'' & b \\ \gamma' & \gamma'' - 1 & c \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & a \\ \beta' - 1 & \beta'' & b \\ \gamma' & \gamma'' - 1 & c \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & a \\ \beta' - 1 & \beta'' & b \\ \gamma' & \gamma'' - 1 & c \end{vmatrix}} = \frac{t}{\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' - 1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' - 1 \end{vmatrix}}.$$

Le déterminant, qui est en dénominateur de t est nul, donc si les trois autres ne le sont pas, on a $t = 0$, et par suite le point de coïncidence correspondant à la racine $S = 1$ est rejeté à l'infini.

Si l'on prend maintenant les deux autres racines qui sont en général simples et distinctes de 1, la dernière des équations (26) est

$$(1 - S)\, t = 0$$

et donnera $t = 0$, puisque $1 - S$ n'est pas nul. Donc les points de coïncidence qui correspondent à ces racines simples sont aussi à l'infini. Ainsi, *dans l'homographie qui correspond à un déplacement d'un corps solide il n'y a pas* EN GÉNÉRAL *de point double* (ou de coïncidence) *à distance finie.*

Ce résultat est en concordance avec cet autre que nous connaissons déjà, que dans le déplacement infiniment petit d'un solide, il n'y a pas en général de point à distance finie dont la vitesse soit nulle.

Cas de l'indétermination.

Pour que les équations (27) pussent fournir un point à distance finie, il faudrait que tous les déterminants qui sont en dénominateurs de x, y, z fussent nuls, auquel cas le système des équations (26) serait indéterminé et se réduirait à deux équations distinctes. Il y aurait donc alors une droite dont tous les points coïncideraient avec leurs propres homologues. Le déplacement se réduirait à une rotation autour de cette droite.

Dans le cas d'un déplacement infiniment petit, nous nous trouverions avoir ce que nous avons appelé une rotation tangente.

Forme canonique d'un déplacement fini.

Dans tous les cas, il y a un point à l'infini correspondant à la racine double $S = 1$, qui est un point de coïncidence. On peut supposer les axes tellement choisis que Oz coupe justement en ce point le plan de l'infini. Alors les équations (26) sont vérifiées par $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, ce qui entraîne $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 1$ (on doit se souvenir que $S = 1$).

Les relations $\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$, $\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$ donnent alors $\gamma = \gamma' = 0$ et l'on peut poser

$$\begin{array}{lll} \alpha = \cos\theta, & \alpha' = -\sin\theta, & \alpha'' = 0, \\ \beta = \sin\theta, & \beta' = \cos\theta, & \beta'' = 0, \\ \gamma = 0, & \gamma' = 0, & \gamma'' = 1. \end{array}$$

Les équations (26) se réduisent alors aux suivantes, qui ne contiennent pas z.

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\cos\theta - 1)\, x - \sin\theta . y \qquad\quad + at &= 0, \\ \sin\theta . x + (\cos\theta - 1)\, y + bt &= 0, \\ ct &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si c n'est pas nul, ces équations sont distinctes et ne donnent qu'un point unique à l'infini, sauf le cas de $\theta = 0$ qui correspond à une *translation* et dans lequel tous les points du plan de l'infini correspondent chacun à lui-même (homologie spéciale comme dans le cas du déplacement plan). Dans le cas général où ni c ni θ ne sont nuls, les équations (19) revêtent la forme

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta + a, \\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta + b, \\ z_1 &= z + c. \end{aligned} \right.$$

Ces formules représentent un déplacement du plan xOy sur lui-même, comme le témoignent les deux premières, accompagné d'un déplacement du même plan parallèlement à Oz avec une amplitude c.

Le déplacement du plan sur lui-même équivaut à une rotation d'amplitude θ autour d'un axe Δ parallèle à Oz. On voit donc que *tout déplacement fini d'un solide peut être obtenu par une rotation autour d'un axe Δ accompagnée d'une translation parallèle au même axe.*

Forme hélicoïdale de tout déplacement fini.

Il est clair que le mouvement hélicoïdal qui s'effectuerait autour de Δ avec le pas $h = \frac{c}{\theta}$ et l'amplitude angulaire θ, aurait pour effet d'amener la figure d'une de ses positions à l'autre.

Le point de Δ, qui est à l'infini, reste invariable dans ce mouvement; les deux autres points de coïncidence, qui doivent être fournis par les racines simples de l'équation caractéristique, sont les points circulaires à l'infini des plans normaux à l'axe Δ.

En effet, dans le déplacement de translation les points du plan de l'infini se correspondent chacun à lui-même et dans le mouvement du plan xOy sur lui-même les points circulaires de ce plan se conservent. C'est, du reste, ce que le lecteur établira aisément sur les formules (28).

Dans le cas particulier où $c = 0$ les équations (28) sont indéterminées et tous les points d'une droite perpendiculaire au plan $Z = 0$ sont leurs propres homologues. Le déplacement résulte d'une simple rotation autour de cette droite. Ce cas se présente forcément dans le déplacement d'une figure autour d'un point fixe.

Le cercle de l'infini et les déplacements.

Nous avons vu que les déplacements dans le plan sont des homographies qui conservent chacun des points circulaires à l'infini. De même, dans l'espace, tout déplacement est une homographie qui conserve le cercle de l'infini.

En effet, des formules (19) nous tirons

$$\rho^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = x^2 + y^2 + z^2 + t.P,$$

où P désigne abréviativement une fonction linéaire x, y, z, t; comme on a $\rho t_1 = t$, on voit que les équations $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ entraînent les équations $t_1 = 0$, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$. Ce qui suffit à démontrer la proposition.

Cette propriété du cercle de l'infini dans un déplacement quelconque dans l'espace, comme celle des points circulaires pour un déplacement dans le plan, ouvre l'accès aux quantités complexes dans la représentation des déplacements, et c'est ce point que nous allons traiter, en commençant par le plan.

Recherche des homographies planes qui conservent les points circulaires.

Les imaginaires dans la cinématique du plan.

106. Puisque les déplacements dans le plan jouissent de la propriété de conserver les points circulaires, il est naturel de rechercher

d'une façon générale les transformations homographiques qui conservent les points circulaires à l'infini.

Observons que cette conservation peut avoir lieu de deux manières, soit parce que chacun de ces deux points se correspond à lui-même, soit parce que l'homographie les échange l'un dans l'autre.

Soit un système de coordonnées homogènes dans lequel $x = 0$, $y = 0$ représentent deux droites rectangulaires et $z = 0$ la droite de l'infini. Les quotients $\frac{x}{z} = X$, $\frac{y}{z} = Y$ représentent les coordonnées rectangulaires ordinaires. Posons aussi $x + iy = u$, $x - iy = v$ où $i = \sqrt{-1}$.

Enfin, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1 seront les valeurs des coordonnées qui correspondent au point homologue d'un point donné x, y, z, u, v.

Puisque les points circulaires se correspondent, la droite de l'infini est, dans les deux cas, son homologue. On aura donc, entre autres formules de transformation,

$$\rho z_1 = z.$$

Si le point circulaire $z = 0$, $u = 0$ se correspond à lui-même, il faut que ces deux équations entraînent celles-ci $z_1 = 0$, $u_1 = 0$, ce qui exige qu'on ait

$$\rho u_1 = \lambda u + \mu z,$$

et de même pour l'autre point circulaire. Les formules de transformation peuvent donc s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \rho u_1 &= \lambda u + \mu z, \\ \rho v_1 &= \lambda' v + \mu' z, \\ \rho z_1 &= z. \end{aligned}\right.$$

On en tire, en posant $\frac{x_1}{z_1} = X_1$, $\frac{y_1}{z_1} = Y_1$ les formules

$$\left\{\begin{aligned} X_1 + iY_1, &= \lambda\ (X + iY) + \mu, \\ X_1 - iY_1, &= \lambda'\ (X - iY) + \mu'. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\lambda\lambda' = r^2, \quad \lambda = re^{i\theta}, \quad \lambda' \equiv re^{-i\theta}, \quad \mu + \mu' = 2a, \quad \mu - \mu' = 2ib,$$

il viendra

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} X_1 + iY_1 &= re^{i\theta}\ (X + iY) + a + ib, \\ X_1 - iY_1 &= re^{-i\theta}\ (X - iY) + a - ib, \end{aligned}\right.$$

d'où résulte

$$(31)\quad \begin{cases} X_1 = r(\cos\theta.X - \sin\theta.Y) + a, \\ Y_1 = r(\sin\theta.X + \cos\theta.Y) + b. \end{cases}$$

Si l'on se borne aux transformations réelles, c'est-à-dire qui font correspondre un point réel à tout point réel, r, θ, a, b sont réels et λ', μ' sont imaginaires conjuguées de λ, μ.

Déplacement compliqué d'une homothétie.

L'interprétation de ces formules est évidente. Elles représentent un déplacement, accompagné (suivi ou précédé, comme on voudra) d'une homothétie dont le pôle est le point O_1 et dont r est le module de transformation.

Homographies qui échangent les points circulaires.

Supposons maintenant que la transformation échange l'un dans l'autre les points circulaires.

Conservons les mêmes notations. On aura toujours $\rho z_1 = z$, car la droite de l'infini est sa propre homologue.

Seulement, les équations $z = 0$, $u = 0$ entraînent $z_1 = 0$, $v_1 = 0$ et les équations $z = 0$, $v = 0$ entraînent $z_1 = 0$, $u_1 = 0$. On a donc ici

$$\rho u_1 = \lambda v + \mu z,$$
$$\rho v_1 = \lambda' u + \mu' z,$$
$$\rho z_1 = z.$$

Si l'on revient maintenant aux coordonnées ordinaires, il viendra

$$X_1 + iY_1 = \lambda\,(X - iY) + \mu,$$
$$X_1 - iY_1 = \lambda'(X + iY) + \mu'.$$

Si dans ces formules on remplace Y par $-$ Y, ce qui revient à prendre la figure symétrique de la proposée par rapport à l'axe O_1x_1 dans sa position primitive, on retombe sur la transformation précédente.

Renversement.

Appelons *renversement* l'opération qui consiste à faire tourner de 180° une figure autour d'une droite ou, ce qui revient au même, qui consiste à prendre la figure symétrique d'une figure par rapport à une droite. On voit que l'on peut énoncer cette proposition :

Toute homographie qui échange les points circulaires à l'infini dans le plan consiste en un renversement accompagné d'une homothétie et d'un déplacement.

Produit de deux homographies.

107. En appliquant à une figure F une transformation homographique H, nous obtenons une transformée que nous représenterons par HF.

Appliquons une seconde homographie H' à la figure HF, nous obtiendrons une nouvelle figure H'HF, qui se déduit directement de F par une homographie H'' = HH' qui est dite égale au *produit* des deux premières. Ce produit symbolique n'est pas commutatif en ce sens que HH' et H'H représentent en général des homographies différentes.

Considérons un ensemble de transformations homographiques définies par une propriété commune. On dit que ces transformations forment un groupe si le produit de deux quelconques d'entre elles est encore une transformation de l'ensemble.

D'après cela, les déplacements d'une figure dans un plan constituent un groupe de transformations homographiques.

Groupe de transformations qui conservent chacun des points circulaires.

Plus généralement, les transformations qui conservent chacun des deux points circulaires à l'infini forment un groupe, et ce groupe comprend celui qui est formé des déplacements.

Nous allons voir que *le groupe des transformations homographiques qui conservent chacun des points circulaires à l'infini est identique au groupe des transformations linéaires de la forme*

$$Z_1 = mZ + n,$$

où Z et Z_1 sont deux variables imaginaires et m, n deux constantes imaginaires.

Son identité avec celui des substitutions linéaires entières.

Revenons, en effet, aux formules générales (31) qui sont équivalentes aux formules (30) et représentent un déplacement plan quelconque accompagné d'une homothétie. Ces formules (30), où nous supposons r, θ, a, b réels afin que la transformation soit réelle, peuvent être comprises dans une formule unique, à savoir la première, car la seconde s'en déduira par le changement de i en $-i$.

Nous poserons donc $m = re^{i\theta}$, $n = a + ib$, $Z = X + iY$, $Z_1 = X_1 + iY_1$ et les équations (30) se trouveront condensées dans l'équation unique

$$Z_1 = mZ + n. \tag{32}$$

Si le module r de m est égal à 1, l'homothétie disparaît et le déplacement seul reste.

Si m lui-même est égal à 1, le déplacement se réduit à une translation.

Si m est réel, la transformation se réduit à une homothétie accompagnée d'une translation, etc.

L'introduction des variables imaginaires Z et Z_1 et leur représentation d'après la manière de Cauchy ramène ainsi à la théorie des transformations linéaires entières à une variable celle des transformations homographiques qui conservent chacun des points circulaires à l'infini.

L'emploi de la représentation de Cauchy offre, au langage près, la même méthode que le calcul des équipollences de Bellavitis. Sous la forme analytique que nous adopterons ici, elle a été développée par plusieurs géomètres.

Supposons que m, n soient des fonctions d'un paramètre t, qui sera la mesure du temps.

Si l'on prend le point de la figure qui est caractérisé par rapport aux axes mobiles xOy par son affixe Z, l'affixe Z_1 de ce point par rapport aux axes mobiles variera avec le temps et par une extension de mots, malgré qu'il ne s'agisse pas d'un simple déplacement, mais d'un déplacement accompagné peut-être d'une homothétie; nous appellerons vitesse d'entraînement la vitesse du point Z_1 sur la courbe qu'il décrit. Si, par l'origine O_1 des axes fixes on mène une parallèle O_1V_1 à cette vitesse, l'affixe du point V_1, extrémité de ce segment, sera, par rapport aux axes fixes,

Expre sion de la vitesse d'entraînement.

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{dm}{dt}Z + \frac{dn}{dt}.$$

L'équation

$$\frac{dm}{dt}Z + \frac{dn}{dt} = 0 \tag{33}$$

fournira un point dont la vitesse d'entraînement est nulle et que nous appellerons encore le centre instantané. L'affixe absolue du point en question, c'est-à-dire son affixe par rapport aux axes fixes, sera donnée par l'équation $Z_1 = mZ + n$ où Z sera remplacé par sa valeur tirée de (33), nous avons ainsi

Centre instantané.

$$Z_1 = \frac{-m\dfrac{dn}{dt} + n\dfrac{dm}{dt}}{\dfrac{dm}{dt}}. \tag{34}$$

Accélération.

Pareillement, la vitesse absolue de V_1 sera représentée par un

Centre d'accélération.

segment O_1V_2 dont l'extrémité V_2 a pour affixe absolue $\frac{d^2Z_1}{dt^2}$. Cette vitesse absolue de V_1 est, du reste, l'accélération d'entraînement.

On a donc le centre d'accélération en écrivant

$$(35)\qquad \frac{d^2Z_1}{dt^2} = \frac{d^2m}{dt^2}Z + \frac{d^2n}{dt} = 0,$$

$$(36)\qquad Z_1 = mZ + n = \frac{-m\frac{d^2n}{dt^2} + n\frac{d^2m}{dt^2}}{\frac{d^2m}{dt^2}}.$$

Traitons un problème où cette méthode donnera plus directement la solution que toute autre.

108. Exemple. — *Cherchons les mouvements plans dans lesquels le centre instantané et le centre des accélérations décrivent deux courbes semblables, en occupant* AU MÊME INSTANT *des positions homologues sur les deux courbes.*

On passe d'une figure à une figure semblable par une homothétie accompagnée d'un déplacement. Si donc Z'_1, Z''_1 sont les affixes, par rapport aux axes fixes O_1x_1, O_1y_1 du centre instantané et du centre des accélérations, on devra avoir

$$(37)\qquad Z''_1 = aZ'_1 + b,$$

où a, b sont deux constantes imaginaires. Or, Z'_1 et Z''_1 sont donnés par les formules (34) et (36).

On peut donc écrire immédiatement l'équation différentielle qui exprime le problème

$$(38)\qquad \frac{-m\frac{d^2n}{dt^2} + n\frac{d^2m}{dt^2}}{\frac{d^2m}{dt^2}} = a\,\frac{-m\frac{dn}{dt} + n\frac{dm}{dt}}{\frac{dm}{dt}} + b.$$

Si $a = 1$, il saute aux yeux que l'on passe de la courbe C lieu du centre instantané à la courbe C' lieu du centre des accélérations par une simple translation.

Si a n'est pas égal à 1, effectuons un transport d'axes équivalent à

l'addition aux affixes Z_1 d'une constante imaginaire k, on aura

$$Z_1'' + k = a\,(Z_1' + k) + b,$$

et si l'on choit k de sorte que $(1 - a)\,k = b$, ce qui est possible si $1 - a$ n'est pas nul,

$$Z_1'' = aZ_1'.$$

Nous pourrons donc supposer $b = 0$ si a n'est pas égal à 1 et l'équation (37) devient

$$\frac{m\frac{d^2n}{dt^2} - n\frac{d^2m}{dt^2}}{m\frac{dn}{dt} - n\frac{dm}{dt}} = a\,\frac{\frac{d^2m}{dt^2}}{\frac{dm}{dt}};$$

en intégrant il vient

$$m\frac{dn}{dt} - n\frac{dm}{dt} = \mathrm{A}\left(\frac{dm}{dt}\right)^a,$$

où A est une constante. Or, cela s'écrit

$$\frac{d\left(\frac{n}{m}\right)}{dt} = \mathrm{A}\,\frac{1}{m^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^a,$$

d'où

$$n = \mathrm{A}m\int\left(\frac{dm}{dt}\right)^a\cdot\frac{dt}{m^2} + \mathrm{B}m,$$

en sorte que la formule symbolique $Z_1 = mZ + n$ devient

$$Z_1 = m\,(Z + \mathrm{B}) + \mathrm{A}m\int\left(\frac{dm}{dt}\right)^a\frac{dt}{m^2}. \tag{39}$$

En transportant les axes mobiles parallèlement à eux-mêmes, on pourra faire disparaître B; il restera donc

$$Z_1 = mZ + \mathrm{A}m\int\left(\frac{dm}{dt}\right)^a\frac{dt}{m^2}. \tag{40}$$

On traiterait de même le cas où $a = 1$.

Dans le cas particulier où m est de la forme $e^{i\theta}$, et où $\theta = \omega t$, déplacement avec *rotation uniforme*, la quadrature s'achève et le problème peut être conduit jusqu'au bout.

Au lieu de supposer que l'on prend le lieu du centre instantané et celui du centre des accélérations dans le plan fixe, on pourrait se poser le même problème dans le plan mobile.

Alors les racines Z', Z'' des équations (33) et (35) devront vérifier l'équation

$$Z'' = aZ' + b,$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$-\frac{\frac{d^2n}{dt^2}}{\frac{d^2m}{dt^2}} = -a\frac{\frac{dn}{dt}}{\frac{dm}{dt}} + b$$

ou

(41) $$\frac{d^2n}{dt^2} = a\frac{\frac{d^2m}{dt^2}}{\frac{dm}{dt}} \cdot \frac{dn}{dt} - b\frac{d^2m}{dt^2}.$$

Cette équation s'intègre encore par quadratures, comme l'équation (38).

Si a est différent de 1, on trouvera, b pouvant être pris nul,

(42) $$n = A\int\left(\frac{dm}{dt}\right)^a dt + B,$$

et si $a = 1$, il vient au contraire

(43) $$n = -b\int\left(\log\frac{dm}{dt}\right) dm + Bm + C,$$

où A, B, C sont des constantes.

Supposons, en particulier, que l'on s'assujettisse à une rotation uniforme, on aura $m = e^{i\theta}$, $\theta = \omega t$ et $\omega =$ constante. Dans le cas de la formule (42) il viendra

(42)' $$n = Ae^{ia\theta} + B$$

et dans le cas de la formule (42)

(43)' $$n = -bi\theta . e^{i\theta} + Be^{i\theta} + C.$$

Mais par un changement de coordonnées fixes ou mobiles on peut

réduire B et C à zéro dans les deux formules, et il reste

$$(42)' \qquad n = A e^{ia\theta},$$

$$(43)' \qquad n = - bi\theta e^{i\theta}.$$

Si l'on suppose, en particulier, que a soit de la forme $a = qi$ où q est une quantité réelle, on trouve que le mouvement est celui d'une spirale logarithmique roulant sans glisser sur une droite avec une vitesse angulaire constante. Dans ces conditions, le centre de courbure de la spirale est précisément le centre des accélérations. Il en résulte donc que la spirale logarithmique possède la propriété de se réduire à sa propre développée par un mouvement (une rotation de 90° autour du pôle) accompagné d'une homothétie.

On a ainsi une solution particulière du problème posé et traité autrefois par Victor Puiseux dans le *Journal de Liouville*, trouver les courbes semblables à leur développée.

Les substitutions linéaires à une variable et les déplacements autour d'un point fixe.

Recherche des homographies de l'espace qui conservent le cercle de l'infini.

109. Nous avons vu que tout déplacement d'une figure dans l'espace est une homographie qui conserve le cercle de l'infini.

Traitons le problème inverse et cherchons toutes les homographies de l'espace qui conservent ce cercle.

Soient x, y, z, t les coordonnées homogènes d'un point; x_1, y_1, z_1, t_1 celles de son transformé.

Nous supposerons que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sont trois plans rectangulaires et $t = 0$ le plan de l'infini; dans ces conditions, comme le plan de l'infini est son propre homologue, une des équations de transformation sera

$$\rho t_1 = t,$$

en sorte que les équations de l'homographie auront la forme suivante :

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho x_1 &= lx + l'y + l''z + at, \\ \rho y_1 &= mx + m'y + m''z + bt, \\ \rho z_1 &= nx + n'y + n''z + ct, \\ \rho t_1 &= t. \end{aligned} \right.$$

Il faut exprimer que dans cette homographie le cercle de l'infini se correspond à lui-même ou que les équations $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ entraînent $t_1 = 0$ et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$. Il faut pour cela et il suffit que l'on ait une identité de la forme

$$(lx + l'y + l''z)^2 + (mx + m'y + m''z)^2 + (nx + n'y + n''z)^2 \\ = h^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

Posons alors

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} l = \alpha . h, & l' = \alpha' . h, & l'' = \alpha'' . h, \\ m = \beta . h, & m' = \beta' . h, & m'' = \beta'' . h, \\ n = \gamma . h, & n' = \gamma' . h, & n'' = \gamma'' . h, \end{array} \right.$$

il viendra

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)^2 + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)^2 \\ \qquad + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{array} \right.$$

On aura donc les identités caractéristiques des transformations orthogonales

$$(47) \left\{ \begin{array}{c} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'' = 0, \quad \alpha'' \alpha + \beta'' \beta + \gamma'' \gamma = 0, \\ \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0. \end{array} \right.$$

Il convient de remarquer que l'on peut, sans inconvénient, dans les formules (45) changer les signes de toutes les quantités α, α' α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', à la condition de changer aussi le signe de h. Nous pourrons donc toujours supposer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

qui est égal à ± 1 d'après les relations (4), est égal précisément à $+1$. Dès lors, le trièdre trirectangle T, dans lequel α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont les cosinus directeurs des arêtes Ox, Oy, Oz est superposable sur le trièdre T_1 (O_1, x_1, y_1, z_1) et peut être considéré comme résultant d'un déplacement de celui-ci. Les formules (44) en y prenant maintenant $\rho = t = t_1 = 1$, deviendront

$$(48) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = h (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + a, \\ y_1 = h (\beta x + \alpha' y + \beta'' z) + b, \\ z_1 = h (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) + c. \end{array} \right.$$

Ces formules représentent évidemment un déplacement accompagné d'une transformation homothétique dont h est le rapport d'homothétie et O_1 le pôle. L'homothétie sera directe ou inverse selon le signe de h.

Déplacement et homothétie.

Nous sommes donc à même d'énoncer la proposition suivante :

Toute transformation homographique qui conserve le cercle de l'infini consiste en un déplacement accompagné, s'il y a lieu, d'une homothétie directe ou inverse.

Comme tout déplacement équivaut à une translation accompagnée d'une rotation autour d'un point fixe, comme, d'autre part, la translation laisse invariable chaque point du plan de l'infini, nous pourrons, dans l'étude des relations entre un déplacement et l'homographie qu'il établit sur le cercle de l'infini, faire abstraction de la translation et nous en tenir au cas où l'homographie conserve un point O à distance finie (et alors une infinité répartis sur une droite).

Nous prendrons O pour origine commune des deux trièdres et alors, pour rester dans le cas général où le déplacement serait compliqué d'une homothétie, nous aurons

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= h(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z),\\ y_1 &= h(\beta x + \beta' y + \beta'' z),\\ z_1 &= h(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z).\end{aligned}\right.$$

Si $h = -1$, l'homothétie se réduit à une symétrie par rapport au point O; si $h = 1$, il n'y a plus d'homothétie.

Coordonnées rapportées au cercle de l'infini.

110. Ceci posé, introduisons l'homographie qui relie les points du cercle de l'infini, et, en premier lieu, cherchons une représentation des points de ce cercle en fonction d'un paramètre λ.

Si nous prenons x, y, z proportionnels à $(1+\lambda^2)i$, $1-\lambda^2$, 2λ, en sorte que

$$(50)\qquad \rho x = (1+\lambda^2)i,\qquad \rho y = 1-\lambda^2,\qquad \rho z = 2\lambda,\qquad t = 0,$$

le point correspondant à ces coordonnées est un point Q du cercle de l'infini, car ses coordonnées vérifient l'équation

$$\rho^2(x^2+y^2+z^2) = -(1+\lambda^2)^2 + (1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2 = 0.$$

Pareillement à une valeur λ' du paramètre λ il correspondra un

autre point Q' à l'infini pour lequel x, y, z sont proportionnels à $(1+\lambda'^2)\,i$, $(1-\lambda'^2)$, $2\lambda'$, en sorte que

$$(51)\qquad \begin{cases} \rho' x' = (1+\lambda'^2)\,i, \\ \rho' y' = (1-\lambda'^2), \\ \rho' z' = 2\lambda'. \end{cases}$$

Les points Q et Q' sont les points circulaires du plan mené par la droite QQ' et par le point O. Ce plan a une équation de la forme

$$ux + vy + wz = 0.$$

En exprimant que Q, Q' sont deux points de ce plan, nous voyons que λ, λ' doivent être racines de l'équation

$$ui(1+\lambda^2) + v(1-\lambda^2) + 2w\lambda = 0,$$

ce qui donne, en calculant $\lambda\lambda'$ et $\lambda+\lambda'$,

$$(52)\qquad \frac{\lambda\lambda'}{iu+v} = \frac{\lambda+\lambda'}{-2w} = \frac{1}{iu-v}.$$

Le plan mené par O et dont Q, Q' sont les points circulaires, a donc l'équation suivante :

$$i(1+\lambda\lambda').x + (1-\lambda\lambda')\,y + (\lambda+\lambda')\,z = 0.$$

La perpendiculaire OP à ce plan a donc pour équations

$$(53)\qquad \frac{x}{i(1+\lambda\lambda')} = \frac{y}{1-\lambda\lambda'} = \frac{z}{\lambda+\lambda'} = \sigma.$$

Cette perpendiculaire perce au point P le plan de l'infini. Le point P est le pôle de la droite QQ' par rapport au cercle de l'infini, en sorte que PQ, PQ' sont les deux tangentes issues de P à ce cercle et les plans OPQ, OPQ' sont les deux plans isotropes menés par OP, c'est-à-dire les plans menés par OP tangentiellement au cercle de l'infini.

Les formules (53) reviennent à représenter toute droite OP issue de O à l'aide des paramètres λ, λ' des points Q, Q' où le cercle de l'infini est touché par les plans isotropes menés par OP [1].

---

[1] Ces coordonnées ont été introduites dans l'étude des propriétés des figures planes autour d'une conique par M. Darboux, sur une *Classe remarquable de courbes et de surfaces*. Je m'en suis servi dans mon *Mémoire sur les lignes géodésiques (Sav. étrangers)*.

Désignons par σ la valeur commune des rapports (53); quand σ varie, x, y, z représentent les coordonnées d'un point quelconque de la droite OP.

Application aux figures sphériques; coordonnées symétriques.

Cherchons en particulier les points M, M′ où cette droite perce la sphère de rayon 1 et de centre O. Il faut exprimer que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ou que

$$\sigma^2 [-(1 + \lambda\lambda')^2 + (1 - \lambda\lambda')^2 + (\lambda + \lambda')^2] = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sigma^2 [\lambda - \lambda']^2 = 1,$$

ou $\sigma = \frac{\pm 1}{\lambda - \lambda'}$. Comme rien ne distingue λ de λ', nous pouvons prendre $\sigma = \frac{1}{\lambda - \lambda'}$. Seulement il faut observer que si l'on échange λ et λ', x, y, z changent de signes et que l'on passe dès lors du point M à son symétrique M′. Nous aurons ainsi :

$$(54) \quad \text{(Coordonnées de M)} \quad x = i\frac{1 + \lambda\lambda'}{\lambda - \lambda'}, \quad y = \frac{1 - \lambda\lambda'}{\lambda - \lambda'}, \quad z = \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda - \lambda'}.$$

$$(54)' \quad \text{(Coordonnées de M}') \quad x = i\frac{1 + \lambda\lambda'}{\lambda' - \lambda}, \quad y = \frac{1 - \lambda\lambda'}{\lambda' - \lambda}, \quad z = \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda' - \lambda}.$$

Les paramètres λ, λ' ont été appelés coordonnées symétriques à la surface de la sphère à cause de la forme symétrique qu'elles font prendre au ds^2 de la sphère, $ds^2 = 4\frac{d\lambda d\lambda'}{(\lambda - \lambda')^2}$ (1).

Il est aisé de se rendre compte que λ, λ' sont, sur la sphère, les paramètres des génératrices rectilignes imaginaires. En effet, si λ reste fixe, le point Q reste fixe et le point M se meut dans le plan mené par le point O tangent en Q au cercle de l'infini, ou plutôt sur la ligne d'intersection de ce plan avec la sphère.

Or, ce plan est tangent suivant la génératrice OQ au cône asymptote (isotrope) de la sphère, c'est donc un plan asymptote qui coupe la sphère suivant deux génératrices rectilignes qui concourent au point Q à l'infini. Le point M décrit une de ces droites et le point M′ décrit l'autre.

Même interprétation pour λ'; en sorte que λ, λ' sont les paramè-

(1) Voir Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I.

tres des deux points Q, Q' où les génératrices rectilignes de la sphère qui passent en M vont couper le cercle de l'infini.

Du reste, la forme linéaire des équations (53) suffirait à prouver que lorsque λ ou λ' varient seuls, le point M décrit une droite située sur la sphère.

Introduction de l'homographie créée par un déplacement sur le cercle de l'infini.

Ceci posé, imaginons que l'on effectue un déplacement autour du centre de la sphère. Un point M de la sphère viendra occuper une position M_1 sur la même sphère. Les génératrices rectilignes de la sphère issues de M_1 seront les homologues de celles qui sont issues de M, en sorte que les points Q_1, Q'_1 où les premières coupent le cercle de l'infini sont les homologues des points Q, Q' où les secondes coupent ce même cercle. La raison en est que ce cercle est le lieu des homologues de ses propres points.

Or, quand deux points Q, Q_1 d'une conique se correspondent homographiquement, et que λ, λ_1 sont, comme dans l'espèce, deux paramètres correspondant d'une manière bi-univoque à ces deux points, l'homographie se traduit par une relation linéaire entre les deux paramètres,

$$(55) \qquad \lambda_1 = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + e}.$$

Considérons alors les coordonnées (λ, λ') du point M sur la sphère et soient λ_1, λ'_1 les coordonnées du point M_1, homologue du point M; comme λ_1, λ'_1 sont les paramètres des points Q_1, Q'_1 homologues des points Q, Q' sur le cercle de l'infini, on passera des uns aux autres par *la même transformation linéaire*.

$$(56) \qquad \lambda_1 = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + e}, \qquad \lambda'_1 = \frac{a\lambda' + b}{c\lambda' + e}.$$

Ainsi s'explique qu'à tout déplacement autour d'un point fixe se trouve attachée une certaine transformation linéaire à une variable.

112. Un calcul facile permet tout à la fois d'obtenir l'équation (55) et de traiter la question réciproque, c'est-à-dire de remonter de la transformation (55) au déplacement lui-même.

Soient x, y, z, 0 les coordonnées homogènes du point Q situé sur le cercle de l'infini; x_1, y_1, z_1, 0 celles du point Q_1 situé sur le même cercle. Comme Q_1 est l'homologue de Q dans le déplacement, on doit avoir

$$x_1 = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \qquad y_1 = \beta x + \ldots, \qquad z_1 = \gamma x + \ldots$$

Mais les coordonnées x, y, z sont proportionnelles à $(1+\lambda^2)i$, $(1-\lambda^2)$, 2λ et x_1, y_1, z_1 proportionnelles à $(1+\lambda_1^2)i$, $(1-\lambda_1^2)$, $2\lambda_1$; on aura donc, ρ désignant un coefficient de proportionnalité,

$$(57)\quad \begin{cases} \rho(1+\lambda_1^2)i = \alpha(1+\lambda^2)i + \alpha'(1-\lambda^2) + 2\alpha''\lambda, \\ \rho(1-\lambda_1^2) = \beta(1+\lambda^2)i + \beta'(1-\lambda^2) + 2\beta''\lambda, \\ \rho.2\lambda_1 = \gamma(1+\lambda^2)i + \gamma'(1-\lambda^2) + 2\gamma''\lambda. \end{cases}$$

On tire des deux premières de ces équations

$$2i\rho = (\alpha+\beta i)(1+\lambda^2)i + (\alpha'+\beta' i)(1-\lambda^2) + 2(\alpha''+\beta'' i)\lambda,$$

d'où par division avec la dernière,

$$\frac{\lambda_1}{i} = \frac{\gamma(1+\lambda^2)i + \gamma'(1-\lambda^2) + 2\gamma''\lambda}{(\alpha+\beta i)(1+\lambda^2)i + (\alpha'+\beta' i)(1-\lambda^2) + 2(\alpha''+\beta'' i)\lambda}.$$

Or, la fraction du second membre se simplifie par suite d'un facteur commun aux deux termes et se réduit à

$$(58)\quad \lambda_1 = \frac{(i\gamma-\gamma')\lambda + \gamma''-1}{(\alpha+\beta i+\alpha' i-\beta')\lambda + (\gamma''+1)\dfrac{\alpha+\beta i+\alpha' i-\beta'}{\gamma i-\gamma'}}.$$

Ce qui est bien une équation linéaire de la forme (55).

Maintenant, en partant de l'équation linéaire, on peut se proposer de retrouver le déplacement.

Regardons dans la formule (55) a, b, c, d comme donnés et cherchons les expressions correspondantes des 9 cosinus $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \ldots$.

Nous nous donnerons a, b, c, d sous la forme suivante :

$$a = r + in, \quad b = mi - l, \quad c = mi + l, \quad d = r - in,$$

où l, m, n, r seront des arbitraires réelles ou imaginaires comme a, b, c, d.

L'équation (55) prend la forme

$$(58)'\quad \lambda_1 = \frac{(r+in)\lambda + mi - l}{(mi+l)\lambda + r - in}.$$

Identifions-la avec l'équation (58).

Nous serons amené à écrire

$$\begin{aligned} i\gamma - \gamma' &= \mathrm{P}(r+in); \\ \gamma'' - 1 &= \mathrm{P}(mi-l); \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta i + \alpha' i - \beta' = \mathrm{P}(mi + l),$$

$$\frac{\gamma'' + 1}{\gamma i - \gamma'}(\alpha + \beta i + \alpha' i - \beta') = \mathrm{P}(r - in),$$

où P est un coefficient de proportionnalité.

En combinant ces équations et posant $\mathrm{P} = 2\frac{mi + l}{\mathrm{D}}$, en sorte que D est encore un coefficient de proportionnalité, on trouve

$$(59) \qquad \begin{cases} i\gamma - \gamma' = 2\dfrac{(r + in)(mi + l)}{\mathrm{D}}, \\ \gamma'' - 1 = -2\dfrac{l^2 + m^2}{\mathrm{D}}, \\ \gamma'' + 1 = 2\dfrac{n^2 + r^2}{\mathrm{D}}. \end{cases}$$

Par soustraction, les deux dernières équations (59) donnent

$$(60) \qquad \frac{l^2 + m^2 + n^2 + r^2}{\mathrm{D}} = 1,$$

équation qui fait connaître D.

On trouvera, au contraire, par addition

$$\gamma'' = \frac{n^2 + r^2 - l^2 - m^2}{\mathrm{D}},$$

et, par multiplication,

$$\gamma''^2 - 1 = -4\frac{(l^2 + m^2)(n^2 + r^2)}{\mathrm{D}^2},$$

d'où l'on tire, en se souvenant que $(i\gamma + \gamma')(i\gamma - \gamma') = \gamma''^2 - 1$,

$$\begin{aligned} i\gamma - \gamma' = \frac{\gamma''^2 - 1}{i\gamma - \gamma'} &= -2\frac{(l^2 + m^2)(n^2 + r^2)}{\mathrm{D}(r + in)(mi + l)} \\ &= 2\frac{(mi - l)(r - in)}{\mathrm{D}}. \end{aligned}$$

De cette équation combinée avec la première équation (59) on tirera γ, γ' par addition et soustraction; comme on a déjà trouvé γ'' on aura, en somme, les valeurs de γ, γ', γ''

$$(61) \qquad \gamma = 2\frac{mr + ln}{\mathrm{D}}, \quad \gamma' = 2\frac{mn - lr}{\mathrm{D}},$$
$$\gamma'' = \frac{-l^2 - m^2 + n^2 + r^2}{\mathrm{D}}.$$

Pour avoir maintenant α, α', α'' β, β', β'' nous aurons recours aux formules (57).

Si, d'abord, dans la dernière de ces formules nous remplaçons γ, γ', γ'' par leurs expressions (61) et λ_1 par son expression (58)', nous aurons la valeur de ρ

$$(62) \qquad \rho = \frac{[(mi + l)\lambda + (r - in]^2}{D}.$$

Les deux premières équations (57) deviennent alors, en y remplaçant λ_1 par sa valeur (58)' et ρ par sa valeur (62),

$$\frac{1}{D}[(mi + l)\lambda + (r - in)]^2 + \frac{1}{D}[(r + in)\lambda + (mi - l)]^2$$
$$= \alpha(1 + \lambda^2)i + \alpha'(1 - \lambda^2) + 2\alpha''\lambda,$$
$$\frac{1}{D}[(mi + l)\lambda + (r - in)]^2 - \frac{1}{D}[(r + in)\lambda + (mi - l)]^2$$
$$= \beta(1 + \lambda^2)i + \beta'(1 - \lambda^2) + 2\beta''\lambda.$$

Il suffit alors d'identifier dans les deux membres de chacune de ces équations les coefficients de λ^2, λ, 1 pour avoir les expressions cherchées de α, α', α'', β, β', β''.

On trouve ainsi les valeurs suivantes, auxquelles sont jointes les valeurs déjà trouvées de γ, γ', γ'' :

$$\alpha = \frac{l^2 - m^2 - n^2 + r^2}{D}, \quad \alpha' = 2\frac{lm + nr}{D}, \quad \alpha'' = 2\frac{ln - mr}{D},$$
$$\beta = 2\frac{lm - nr}{D}, \quad \beta' = \frac{-l^2 + m^2 - n^2 + r^2}{D}, \quad \beta'' = 2\frac{mn + lr}{D},$$
$$\gamma = 2\frac{ln + mr}{D}, \quad \gamma' = 2\frac{mn - lr}{D}, \quad \gamma'' = \frac{-l^2 - m^2 + n^2 + r^2}{D},$$
$$D = l^2 + m^2 + n^2 + r^2.$$

Ce sont les formules d'Euler, retrouvées par Olinde Rodrigues et démontrées à la page 197.

On peut donner des paramètres l, m, n, r l'interprétation géométrique suivante :

Cherchons les paramètres des points diamétralement opposés I, I' où l'axe de rotation perce la sphère. Soient λ, λ' les paramètres de ces points (on sait qu'on passe de I à I' en échangeant simplement λ et λ'). I coïncide avec son homologue I_1, en sorte que les paramè-

tres de I_1, qui se déduisent de λ, λ' par la formule (58)', doivent être encore égaux à λ et à λ'.

On voit donc que λ, λ' doivent être racines de l'équation

$$\lambda = \frac{(r + in) + mi - l}{(mi + l)\lambda + r - in}$$

ou

$$(l + mi)\lambda^2 - 2in\lambda + l - mi = 0.$$

On tire de cette équation les suivantes :

$$\frac{l + mi}{1} = \frac{2in}{\lambda + \lambda'} = \frac{l - mi}{\lambda\lambda'},$$

d'où

$$\frac{l}{(1 + \lambda\lambda')i} = \frac{m}{1 - \lambda\lambda'} = \frac{n}{\lambda + \lambda'},$$

et il suffit de comparer aux formules (53) pour constater que les cosinus directeurs de l'axe sont proportionnels précisément à l, m, n.

On verra dans la note I de M. Darboux que si θ est l'amplitude de la rotation, on a la relation

$$\frac{r}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cot g \frac{\theta}{2}. \tag{63}$$

Le déplacement n'est réel que si les rapports des quantités l, m, n, r le sont.

Les substitutions linéaires et les rotations autour d'un point fixe.

Nous avons vu comment les déplacements dans le plan se trouvaient liés aux transformations linéaires entières à une variable. Il résulte de ce qui précède qu'à toute rotation autour d'un point se trouve attachée une transformation linéaire *fractionnaire* portant sur une variable complexe.

Nous avons déjà dit qu'un ensemble d'opérations est dit former un groupe si le résultat de deux opérations successives quelconques de cet ensemble est équivalent à une seule opération du même ensemble. Par exemple, l'ensemble de toutes les transformations linéaires forme un groupe. Dans ce groupe même on peut distinguer des transformations définies par un certain nombre de propriétés de manière que cet ensemble de transformations particulières forme lui-même un groupe (on dit alors un sous-groupe dans le groupe général).

De même pour les rotations autour d'un point, leur ensemble forme

un groupe dans lequel il est possible de détacher des groupes plus particuliers ou sous-groupes.

Considérons, par exemple, l'ensemble des rotations qui ne font qu'échanger entre eux les sommets d'un polyèdre régulier. L'ensemble limité de ces rotations constitue un groupe au sens qui vient d'être défini.

Prenons alors l'ensemble des substitutions linéaires attachées chacune à l'une des rotations précédentes. Ces substitutions vont former un groupe qui est l'image analytique du premier.

Nous aurons de la sorte un groupe de substitutions dérivé du groupe des rotations qui superposent à lui-même un tétraèdre régulier; ce sera le groupe du tétraèdre. On aura de même les groupes de l'hexaèdre, de l'octaèdre, du dodécaèdre, de l'icosaèdre. Ces groupes de substitutions linéaires se trouvent liés à des questions d'analyse importantes. Nous renverrons pour ce sujet au livre de M. Félix Klein : *Sur l'Icosaèdre*.

NOTES DE M. G. DARBOUX

NOTE I

Nouvelle démonstration des formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues.

La démonstration suivante est directe et offre une interprétation immédiate des paramètres qui figurent dans ces formules.

Considérons un déplacement d'une figure autour d'un point fixe dans l'espace.

Un point de la figure, qui occupait primitivement la position M, vient occuper, après le déplacement, une position M_1. Soit Δ l'axe de la rotation équivalente à ce déplacement, et θ l'amplitude de cette rotation.

Les points M, M_1 sont sur une même circonférence de cercle, dont le centre est en P sur l'axe Δ et dont le plan est normal à cet axe.

L'angle MPM_1 est justement égal à l'angle θ. Menons en M, M_1 les tangentes à ce cercle; ces tangentes se coupent en un point Q et la droite PQ bissecte l'angle MPM_1.

Concevons que la figure se trouve animée autour de l'axe Δ d'une rotation continue avec une vitesse angulaire représentée par $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$; le segment MQ représente évidemment la vitesse linéaire du point M dans ce mouvement.

Si donc α, β, γ sont les cosinus directeurs de l'axe Δ; x, y, z les coordonnées du point M, les projections du segment MQ seront fournies par les formules connues $qz - ry$, ..., où les composantes de la rotation p, q, r sont ici $\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\beta \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\gamma \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. Ces projections seront donc

$$(\beta z - \gamma y) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \quad (\gamma x - \alpha z) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \quad (\alpha y - \beta x) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

En leur ajoutant les coordonnées x, y, z du point M, nous aurons les coordonnées X, Y, Z du point Q,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x + (\beta z - \gamma y)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\\ Y &= y + (\gamma x - \alpha z)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\\ Z &= z + (\alpha y - \beta x)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.\end{aligned}\right.$$

Mais on peut aussi regarder le point Q comme l'extrémité du segment M_1Q qui représente évidemment la vitesse linéaire du point M_1 dans une rotation autour de Δ, effectuée dans le sens inverse du précédent, avec la même valeur de la vitesse angulaire.

En raisonnant comme plus haut et désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M_1, nous aurons donc les nouvelles expressions des coordonnées du point Q,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x_1 - (\beta z_1 - \gamma y_1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\\ Y &= y_1 - (\gamma x_1 - \alpha z_1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\\ Z &= z_1 - (\alpha y_1 - \beta x_1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules et dans les précédentes introduisons les notations

$$(3)\qquad \alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{l}{r},\qquad \beta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{m}{r},\qquad \gamma\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{n}{r}$$

et égalons les valeurs trouvées pour X, pour Y, pour Z. Nous aurons, après avoir chassé le dénominateur r,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} rx + mz - ny &= rx_1 - mz_1 + ny_1,\\ ry + nx - lz &= ry_1 - nx_1 + lz_1,\\ rz + ly - mz &= rz_1 - ly_1 + mx_1.\end{aligned}\right.$$

Ces formules vont nous permettre d'exprimer x_1, y_1, z_1 en fonctions de x, y, z.

En multipliant d'abord par l, m, n et ajoutant, nous déduirons des équations (4) la suivante :

$$(5)\qquad lx + my + nz = lx_1 + mx_1 + nz_1.$$

Considérons maintenant les équations (4) et (5). Pour obtenir la

valeur de x_1 nous allons les ajouter après les avoir multipliées respectivement par le coefficient de x_1 dans chacune d'elles; par r, $-n$, m et l par conséquent. Les variables y_1, z_1 disparaissent, et il reste

$$(l^2 + m^2 + n^2 + r^2)\,x_1 = [l^2 - m^2 - n^2 + r^2]\,x \\ + 2\,[lm - nr]\,y + 2\,[ln + mr]\,z;$$

on trouvera de même

$$(l^2 + m^2 + n^2 + r^2)\,y_1 = 2\,(lm + nr)\,x \\ + (l^2 + m^2 - n^2 + r^2)\,y + 2\,(mn - lr)\,z,$$
$$(l^2 + m^2 + n^2 + r^2)\,z_1 = 2\,(ln - mr)\,x \\ + 2\,(mn + lr)\,y + (-\,l^2 - m^2 + n^2 + r^2)\,z.$$

On retrouve les formules d'Olinde Rodrigues.

Les formules (3) prouvent que l, m, n sont proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe de rotation, tandis que l'on a

$$(6) \qquad r = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}.$$

NOTE II

Sur les renversements et les inversions planes.

Renversement. — Inversion plane.

1. Nous appelons ***renversement*** une rotation de 180° d'une figure autour d'une droite de l'espace et inversion plane une transformation par symétrie par rapport à un plan.

Les renversements et les inversions planes permettent d'étudier et de composer très simplement les divers déplacements de l'espace.

Soit d'abord à effectuer une rotation d'amplitude θ dans le sens direct autour d'un axe Δ. On pourra remplacer cette rotation par deux inversions planes successives dans les conditions suivantes. On prendra d'abord un plan P_1 quelconque passant par Δ et on l'amènera dans la position P_2 par une rotation *directe* autour de Δ, d'amplitude $\frac{\theta}{2}$.

Le résultat des deux inversions planes successives prises par rapport à P_1 *d'abord,* puis par rapport à P_2, équivaut à une simple rotation directe, d'amplitude θ autour de l'axe Δ.

Une interversion dans l'ordre des inversions équivaudrait à un changement dans le sens de la rotation autour de Δ.

Il est permis de faire tourner arbitrairement autour de son arête Δ le dièdre formé par les plans P_1, P_2 sans qu'ils cessent de fournir une représentation de la rotation. En effet, le plan P_1 est un plan quelconque mené par l'axe Δ.

Si l'angle θ vaut 180°, c'est-à-dire s'il s'agit d'un renversement autour d'un axe Δ, le sens de la rotation est indifférent, ainsi que l'ordre des inversions planes relatives aux plans P_1 et P_2; ces plans sont alors rectangulaires.

Ainsi un renversement équivaut à deux inversions planes relatives

à deux plans rectangulaires quelconques se coupant suivant l'axe du renversement.

Représentation des rotations par des renversements.

2. Considérons les deux plans P_1, P_2 définis précédemment, qui servent à représenter par deux inversions planes successives une rotation d'amplitude θ autour d'un axe Δ.

Élevons dans chacun de ces plans, et en un même point Q de Δ une perpendiculaire à cette droite. Soient Δ_1, Δ_2 ces deux perpendiculaires contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2 et désignons par P le plan de ces deux droites.

Je dis que *les renversements successifs autour des droites Δ_1 et Δ_2 sont équivalents à la rotation directe d'amplitude θ autour de Δ.*

En effet, le renversement autour de Δ_1 équivaut à une inversion par rapport à P_1 suivie d'une inversion par rapport à P; tandis que le renversement autour de Δ_2 équivaut à une inversion par rapport à P suivie d'une inversion par rapport à P_2. Les deux renversements successifs autour de Δ_1 et de Δ_2 équivalent donc aux inversions planes suivantes, dans l'ordre même où elles se trouvent énumérées : inversions par rapport à P_1, par rapport à P, encore par rapport à P, puis par rapport à P_2; or, les deux inversions successives par rapport à P se détruisent et il reste une inversion par rapport à P_1, suivie d'une inversion par rapport à P_2, c'est-à-dire la rotation θ.

Il est clair que les droites Δ_1, Δ_2, comme les plans P_1, P_2, n'ont pas une position déterminée et qu'on peut leur imprimer le mouvement du *verrou* autour de Δ, c'est-à-dire les faire glisser et tourner tout d'une pièce d'une manière quelconque autour de Δ, sans qu'elles cessent de représenter la rotation. Ainsi :

Une rotation est parfaitement représentée par un angle dont le sommet est sur l'axe de rotation, son plan étant perpendiculaire à cet axe et sa grandeur égale à la moitié de la rotation.

Représentation des translations.

3. Les inversions planes par rapport à des plans parallèles représentent, comme on sait, les *translations*. Voici la proposition précise relative à cette représentation.

Une translation finie peut être représentée par deux inversions relatives à des plans parallèles, qui sont perpendiculaires à la translation et dont la distance est égale à la moitié de la translation.

Si l'on intercale entre ces deux inversions deux autres inversions

prises relativement à un même plan perpendiculaire aux précédents, inversions dont l'ensemble ne produit aucun déplacement, on voit que *toute translation finie équivaut à deux renversements autour de deux droites parallèles qui sont perpendiculaires à cette translation et dont la distance est égale à la moitié de la translation. Le plan de ces droites est parallèle à la translation.*

Composition des rotations.

4. Ceci posé, appliquons les considérations qui précèdent en premier lieu à la composition de deux rotations autour d'axes concourant en un point O.

Soient AOA_1 et BOB_1 les angles qui représentent ces deux rotations. Appelons OC la droite d'intersection des plans de ces deux angles. Nous pourrons, nous le savons, faire tourner l'angle AOA_1 dans son plan, de manière à amener OA_1 sur la droite OC, l'angle AOA_1 prend ainsi la position DOC, sans cesser de représenter la même rotation. Faisons de même tourner BOB_1 dans son plan de façon à amener OB sur OC; cet angle BOB_1 prend ainsi la position COD_1, et cela sans cesser de représenter la même rotation. Or, actuellement, les deux rotations successives sont représentées par les renversements suivants qui doivent être effectués dans l'ordre de l'énumération : autour de OD, autour de OC, autour de OC, autour de OD_1.

Les deux renversements *consécutifs* autour de OC se détruisent, et il reste seulement le renversement autour de OD suivi d'un renversement autour de OD_1, c'est-à-dire la rotation représentée par l'angle DOD_1.

On voit la marche qu'il faudrait suivre pour composer plusieurs rotations se succédant dans un ordre donné et qui auraient lieu autour d'axes concourants (¹).

Il y a lieu d'observer que la méthode précédente conduit à une démonstration nouvelle et élémentaire de cette proposition que tout déplacement fini autour d'un point équivaut à une rotation. En effet, par une première rotation on amènera d'abord un point M du corps dans sa position définitive M_1 et il n'y aura plus qu'à effectuer une seconde rotation autour d'un axe joignant M_1 au point fixe pour amener le corps dans sa position finale. Or, il résulte de ce qui précède que ces deux rotations pourront être remplacées par une seule que nous savons construire.

(¹) Cette représentation met en évidence un lien entre la composition des rotations et la théorie des quaternions.

Représentation d'un mouvement quelconque.

5. Traitons le cas du mouvement fini le plus général. On peut toujours le réaliser en amenant, par une translation, un point M de la figure invariable dans sa nouvelle position M_1, puis en effectuant une rotation autour d'un axe passant par M_1.

La translation se ramène à deux inversions relatives à deux plans parallèles P et P_1; la rotation équivaut, de même, à deux inversions autour de deux plans qui se coupent en P_2, P_3. Donc, tout déplacement équivaut à quatre inversions autour des plans P, P_1, P_2, P_3, dont les deux premiers sont parallèles. Mais, comme on peut faire tourner le dièdre P_1, P_2 d'un angle quelconque autour de son arête, on peut supposer que P et P_1 ne sont plus parallèles. Alors les deux premières inversions définiront une rotation, ainsi que les deux suivantes. Donc :

Tout déplacement fini d'une figure invariable se ramène d'une infinité de manières à deux rotations successives.

Soient Δ_1 et Δ_2 les axes de deux de ces rotations et Δ leur plus courte distance.

La rotation autour de Δ_1 pourra se représenter par deux renversements autour de deux droites normales à Δ_1 au même point. On peut même supposer que Δ est l'axe de l'un de ces deux renversements, par exemple du second.

Nous représenterons alors par Δ'_1, Δ les axes de ces deux renversements. De même, la rotation autour de Δ_2 se représentera par deux renversements, dont le premier pourra être supposé avoir Δ pour axe, tandis que l'axe du second sera une certaine droite Δ'_2. Alors les rotations successives autour des axes Δ_1 et Δ_2 sont équivalentes aux quatre renversements autour des droites Δ'_1, Δ, Δ, Δ'_2, dans l'ordre même de l'énumération. Les deux renversements *consécutifs* autour de Δ se détruisent et il ne reste que les renversements, autour de Δ'_1 d'abord, autour de Δ'_2 ensuite.

Ainsi : *Tout déplacement fini d'un corps solide se ramène à deux renversements successifs autour de deux droites* Δ'_1, Δ'_2.

Retour au déplacement hélicoïdal.

La notion du déplacement hélicoïdal découle immédiatement de là. Menons, en effet, par Δ'_1 deux plans rectangulaires P_1, P'_1 dont le premier est parallèle à Δ'_2 et par Δ'_2 deux plans rectangulaires P_2, P'_2 dont le premier est parallèle à Δ'_1 et, par suite, au plan P_1.

Les deux renversements se ramènent aux quatre inversions planes suivantes effectuées dans l'ordre de l'énumération : par rapport au plan P'_1, au plan P_1, au plan P_2, au plan P'_2.

Les deux inversions intermédiaires sont relatives à deux plans

parallèles; elles sont donc équivalentes à une translation normale à ces plans et, par suite, parallèle à la plus courte distance des axes Δ'_1, Δ'_2. Or, une translation et une inversion plane dont le plan est parallèle à la translation sont deux transformations échangeables, en ce sens que l'ordre dans lequel on les opère est indifférent. On pourra donc échanger cette translation avec la première inversion plane, qui, en se combinant alors avec la dernière, donnera lieu à une rotation qui a lieu autour de la plus courte distance des axes Δ'_1 et Δ'_2.

On voit que *tout déplacement fini se ramène à une rotation et à une translation parallèle à l'axe de la rotation.*

De même qu'une rotation est représentée par un angle, le déplacement précédent peut être représenté comme il suit. Prenons sur l'axe du mouvement hélicoïdal un point A et élevons en A une perpendiculaire D_1 à l'axe; soit θ l'amplitude de la rotation, faisons tourner D_1 dans le sens direct autour de l'axe d'un angle $\frac{\theta}{2}$, de façon à l'amener dans une position AD'_1, puis faisons glisser AD'_1 dans le sens de la translation suivant l'axe d'une quantité égale à $\frac{h}{2}$, moitié de la translation. Soit D_2 la position ainsi obtenue. Le déplacement fini équivaut à deux renversements autour des axes D_1 et D_2 successivement.

Comme du reste la position de D_1 est arbitraire, en ce sens que D_1 est une normale quelconque à l'axe du mouvement hélicoïdal, on voit que l'on pourra imprimer aux droites D_1 et D_2 en bloc un mouvement de verrou autour de l'axe sans qu'elles cessent de représenter le mouvement considéré.

De là résulte un moyen très simple de composer deux mouvements finis quelconques. Car, soient D_1, D_2 et D'_1, D'_2 les droites qui les représentent, et D la plus courte distance des axes de ces deux mouvements, lesquels sont les perpendiculaires communes aux axes D_1, D_2 d'une part, et D'_1, D'_2 d'autre part. Grâce au mouvement de verrou dont on dispose, on pourra amener D_2 et D'_1 en coïncidence avec D, et alors le mouvement résultant des deux mouvements donnés s'obtiendra par les renversements autour des droites D_1, D, D, D'_2 dans l'ordre même de l'énumération. Les deux renversements intermédiaires se détruisent et il reste simplement les deux renversements autour de D_1 et de D'_2, qui représentent le mouvement résultant.

Théorème de M. Stéphanos.

6. A la considération des renversements se rattache très directement un théorème élégant déjà énoncé par M. Stéphanos pour le

cas particulier d'une figure plane se déplaçant dans le plan même où elle est tracée (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 1881). Ce théorème consiste en ce que : *Trois figures égales, situées d'une manière arbitraire, coïncident avec les symétriques d'une même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.*

Soient, en effet, F_1, F_2, F_3 les trois figures proposées.

Conservons toutes les notations précédentes. On passera de F_1 à F_2 par deux renversements autour des droites D_1, D puis de F_2 à F_3 par deux renversements dont les axes seront D, D'_2. De là il résulte qu'on aura *une même* figure en prenant les symétriques de F_1, F_2, F_3 respectivement par rapport aux droites D_1, D, D'_2, c. q. f. d.

Dans mes travaux antérieurs et dans mon enseignement j'ai plus d'une fois introduit les inversions planes et les renversements comme éléments propres à simplifier différentes recherches ; mais, en reproduisant ici la méthode que j'ai employée dans la note V de mes *Leçons sur la théorie des surfaces*, je tiens à indiquer que cette méthode était suivie depuis cinq à six ans, comme je l'ai appris récemment, par M. P. Morin, professeur à la Faculté des sciences de Rennes, et aussi à appeler l'attention sur une note de M. W. Burnside ayant pour titre : *On the finite displacement of a rigid body*, parue en 1893 dans le *Messenger of Mathematics* et où se trouve donnée la représentation d'un déplacement hélicoïdal par deux renversements, ainsi que l'application à la composition de deux mouvements hélicoïdaux effectués successivement.

NOTE III

Sur les mouvements algébriques.

Définition des mouvements algébriques.

1. La position d'un corps dans l'espace se trouve définie par les coordonnées a, b, c de l'origine et les 9 cosinus directeurs α, β, γ, α'_1, ... d'un trièdre trirectangle mobile lié invariablement au corps. En prenant pour ces 9 cosinus, ainsi que pour a, b, c des fonctions algébriques de 1, 2, ... paramètres, on arrive à définir des mouvements algébriques possédant 1, 2, ... degrés de liberté.

Relations de dualité entre un mouvement et son inverse.

Les mouvements algébriques et leurs inverses, qui sont aussi algébriques, présentent des relations de dualité dont l'intérêt a été signalé pour la première fois par Chasles dans une curieuse note, la 34e, insérée dans l'*Aperçu historique* et qui a pour titre : « Sur la dualité dans les sciences mathématiques. Exemples pris dans l'art du tourneur et dans les principes de la dynamique ».

Nous indiquerons seulement ici quelques-unes de ces relations, pour en faire connaître la nature et pour montrer sur un exemple le parti que l'on en peut tirer.

Examinons d'abord le cas des mouvements à un paramètre.

Appelons C le corps mobile et E l'espace fixe auquel on rapporte son mouvement. Le mouvement relatif de E par rapport à C est, comme on sait, ce que l'on appelle l'inverse du mouvement de C par rapport à E.

Soit M un point du corps C et π un plan de l'espace E, pris quelconque dans cet espace, de même que le point M a été pris quelconque dans le corps C. Le point M décrit une trajectoire, qui est algébrique si le mouvement est algébrique, et dont le degré est égal au nombre de fois que le point M vient traverser le plan π; soit m ce nombre.

Considérons maintenant le mouvement inverse. Dans ce mouvement le plan π de l'espace E enveloppe dans le corps C une certaine surface développable, dont la classe est égale au nombre de fois que le plan π vient se faire traverser par un point M quelconque du corps C; ce nombre est précisément égal à m. On a donc ce premier théorème :

Le degré de la courbe trajectoire d'un point d'un corps solide en mouvement est égal à la classe de la développable enveloppée par un plan dans le mouvement inverse.

Considérons une droite Δ du corps C; le degré de la surface réglée engendrée par cette droite est égal au nombre de fois m que la droite Δ vient couper une droite Δ' de l'espace E.

Dans le mouvemant inverse, Δ' décrit une surface réglée dont le degré est égal au nombre de fois que Δ se trouve coupée par une droite Δ liée au corps C : ce nombre est encore égal à m. De là cet autre théorème :

Le degré de la surface réglée engendrée par une droite d'un corps en mouvement est égal au degré de la surface réglée engendrée par une droite dans le mouvement inverse.

Prenons maintenant le cas des mouvements à deux paramètres.

Soit un point M du corps C; le degré de la surface algébrique qu'il décrit est le nombre de fois que le point M vient se placer sur une droite Δ de l'espace E. Considérons cette droite Δ dans le mouvement inverse; elle engendre une congruence dont l'ordre est égal au nombre de fois que Δ va passer par un point M du corps C. Donc :

Dans un mouvement algébrique à deux paramètres, l'ordre de la surface trajectoire d'un point est égal à l'ordre de la congruence engendrée par une droite dans le mouvement inverse.

On verrait de même que *la classe de la surface enveloppée par un plan est égale à la classe de la congruence engendrée par une droite dans le mouvement inverse.*

Mouvement dont toutes les trajectoires sont planes.

2. Il serait aisé de poursuivre dans ce sens et de multiplier les exemples. Nous préférons indiquer tout de suite comment les propo-

sitions précédentes permettent de traiter certains problèmes particuliers, entre autres celui-ci :

Trouver les mouvements à un paramètre dans lesquels tous les points du corps décrivent des courbes planes (¹).

Distinction préalable.

Pour résoudre cette question, nous établirons d'abord une distinction relative aux plans des trajectoires. Il peut arriver, ou bien que tout plan de l'espace contienne la trajectoire d'un certain point du corps mobile, ou bien, au contraire, que les plans des trajectoires soient exceptionnels dans l'espace.

Examinons d'abord la première hypothèse.

Emploi du mouvement inverse.

Dans le mouvement inverse, tous les plans π liés à l'espace E iront passer chacun par un point M du corps C et envelopperont chacun un cône autour du point M correspondant. La classe de ce cône sera égale au degré de la trajectoire plane du point M dans le mouvement direct. Or, il est aisé de montrer que le cône est de révolution.

Prenons, en effet, deux plans parallèles Π, Π'; soient M, M' les points fixes par lesquels ils passent respectivement.

Les plans Π et Π' conservent entre eux la même distance constante a, et comme le plan Π' passe par le point fixe M', le plan Π demeure tangent à la sphère Σ qui a pour centre le point M' et le rayon a.

Puisque, d'autre part, le plan Π passe au point fixe M, il est clair qu'il enveloppe le cône de révolution circonscrit à la sphère Σ; MM' est l'axe de révolution de ce cône.

Comme Π' est l'un quelconque des plans parallèles au plan Π, on voit que la droite MM', que nous désignerons aussi par Δ, est le lieu des points fixes par où vont passer tous les plans parallèles au plan Π, et que Δ est l'axe commun de tous les cônes de révolution enveloppés par chacun de ces plans.

A toute direction de plan Π correspond une droite Δ. Je dis que toutes ces droites Δ sont parallèles.

Menons, en effet, par un point fixe O un plan Π_0 parallèle au plan Π.

Ce plan enveloppera un cône de révolution dont l'axe Δ_0 sera la parallèle à Δ issue du point O. La droite X issue de O perpendiculairement au plan Π_0 engendrera aussi un cône de révolution autour de l'axe Δ_0.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1881.

Envisageons alors l'ensemble des plans Π de l'espace E et l'ensemble correspondant des normales X issues de O à ces plans.

Ces normales forment autour de O une figure de forme invariable, car les angles des normales sont invariables comme les angles des plans dans l'espace E.

Comme chacune de ces normales engendre un cône de révolution, en coupant par une sphère leur ensemble, nous aurons une figure sphérique de forme invariable dont tous les points décriront des cercles. Un tel mouvement ne peut consister qu'en une rotation autour d'un diamètre fixe de la sphère.

Il suit de là que les cônes décrits par les normales X et, par suite, les cônes supplémentaires enveloppés par les plans Π_0 ont le même axe Δ_0 de révolution. En conséquence, toutes les droites Δ sont bien parallèles entre elles.

On peut ajouter que, puisque Δ_0 est fixe dans l'espace aussi bien que par rapport au système des plans Π_0, les droites Δ ont une direction invariable dans le corps C et aussi dans l'espace E.

Retour au mouvement direct.

Revenons maintenant au mouvement direct du corps C par rapport à l'espace E. Les trajectoires planes seront des courbes du second degré puisque, dans le mouvement inverse, les cônes-enveloppes sont de révolution, et partant de la seconde classe. En outre, il y a une direction de droites Δ qui reste invariable dans le corps comme dans l'espace, et deux points du corps situés sur une même droite Δ ont leurs trajectoires dans des plans parallèles.

Il est, dès lors, naturel de prendre un système d'axes de coordonnées fixes dans lequel l'axe O_1Z_1 sera parallèle à la direction invariable des droites Δ, tandis que l'axe OZ du trièdre mobile sera lui aussi parallèle à ces mêmes droites.

Les formules qui représentent le mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned} x_1 &= a + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 &= b + x\sin\theta + y\cos\theta, \\ z_1 &= c + z. \end{aligned}$$

Nous choisirons θ comme variable indépendante et il s'agit de trouver pour a, b, c des expressions convenables en θ, de sorte que la trajectoire d'un point quelconque soit plane.

Si nous prenons trois points quelconques (x', y', z') (x'', y'', z'') (x''', y''', z''') dans le corps, ils décrivent dans l'espace trois courbes planes situées dans des plans Π', Π'', Π''' qui peuvent être pris quelconques, d'après l'hypothèse qui nous a servi de point de départ. Nous pouvons, en conséquence, toujours supposer que ces plans

forment un trièdre et ne sont pas parallèles à une même droite, en sorte que, si l'on écrit leurs équations

$$\begin{aligned} l'x_1 + m'y_1 + n'z_1 + p' &= 0,\\ l''x_1 + m''y_1 + n''z_1 + p'' &= 0,\\ l'''x_1 + m'''y_1 + n'''z_1 + p''' &= 0, \end{aligned}$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \\ l''' & m''' & n''' \end{vmatrix}$$

ne sera pas nul.

Exprimons alors que les points (x', y', z') (x'', y'', z'') (x''', y''', z''') ont leurs trajectoires dans ces trois plans. On obtiendra les trois équations

$$\begin{aligned} &l'[a + x'\cos\theta - y'\sin\theta] + m'[b + x'\sin\theta + y'\cos\theta]\\ &\qquad\qquad + n'[c + z'] + p' = 0,\\ &l''[a + x''\cos\theta - y''\sin\theta] + m''[b + x''\sin\theta + y''\cos\theta]\\ &\qquad\qquad + n''[c + z''] + p'' = 0,\\ &l'''[a + x'''\cos\theta - y'''\sin\theta] + m'''[b + x'''\sin\theta + y'''\cos\theta]\\ &\qquad\qquad + n'''[c + z'''] + p''' = 0, \end{aligned}$$

que l'on pourra résoudre en a, b, c puisque le déterminant de ces équations est justement le déterminant précédent, qui n'est pas nul.

On reconnaît par là que a, b, c sont des fonctions linéaires de $\sin\theta$, $\cos\theta$, en sorte qu'on a

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{L}\sin\theta + \mathrm{L}'\cos\theta + \mathrm{L}'' + x\cos\theta - y\sin\theta,\\ y_1 &= \mathrm{M}\sin\theta + \mathrm{M}'\cos\theta + \mathrm{M}'' + x\sin\theta + y\cos\theta,\\ z_1 &= \mathrm{N}\sin\theta + \mathrm{N}'\cos\theta + \mathrm{N}'' + z. \end{aligned}$$

En effectuant une translation du trièdre fixe et une translation du trièdre mobile, on pourra amener L', L'', M', M'' à être nuls et N'' à être égal à — N'. Si, de plus, on fait tourner d'un même angle α, convenablement choisi, les axes mobiles xOy et les axes fixes $x_1O_1y_1$, on pourra annuler M. Il restera alors

Équation du mouvement cherché.

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{L}\sin\theta + x\cos\theta - y\sin\theta,\\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta,\\ z_1 &= \mathrm{N}\sin\theta + \mathrm{N}'\cos\theta - \mathrm{N}' + z. \end{aligned}\right.$$

Pour $\theta = 0$ on a $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, c'est-à-dire que, pour $\theta = 0$, les deux trièdres, l'un fixe T_1 et l'autre mobile T, coïncident.

Équation du plan de la trajectoire d'un point.

Si l'on cherche l'équation

$$lx_1 + my_1 + nz_1 + p = 0$$

du plan Π qui contient la trajectoire du point M (x, y, z), on est conduit à écrire que l, m, n, p sont des fonctions de x, y, z rendant identique l'équation

$$l\,[\mathrm{L}\sin\theta + x\cos\theta - y\sin\theta] + m\,[x\sin\theta + y\cos\theta] \\ + n\,[\mathrm{N}\sin\theta + \mathrm{N}'\cos\theta - \mathrm{N}' + z] + p = 0.$$

Ce qui donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -(y-\mathrm{L})\,l + x.m + \mathrm{N}.n &= 0,\\ x.l + y.m + \mathrm{N}'.n &= 0,\\ n\,(z-\mathrm{N}') + p &= 0. \end{aligned}\right.$$

Des deux premières équations on tire :

$$(3)\qquad \frac{l}{\mathrm{N}'x - \mathrm{N}y} = \frac{m}{\mathrm{N}x + \mathrm{N}'(y-l)} = \frac{n}{-y\,(y-\mathrm{L}) - x^2},$$

tandis que $\frac{p}{n}$ est fourni par la dernière des équations (2).

Discussion.

On voit donc que tous les points de la figure décrivent des courbes planes, et de plus, il résulte de la forme même des équations (1) que ces courbes sont des ellipses; car, en éliminant $\sin\theta$, $\cos\theta$ entre les deux premières équations (1) et l'équation $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, on obtiendra l'équation d'une ellipse, projection de la courbe dans l'espace.

On observera sur les équations (1) que deux points situés sur une même parallèle à Oz décrivent la même ellipse qui serait transportée parallèlement à Oz.

Si les dénominateurs des équations (3) sont nuls, les équations (2) sont indéterminées, et une infinité de plans passent par la trajectoire du point (x, y, z), laquelle, dès lors, se trouve être une droite ou plutôt un segment de droite. Les équations

$$\mathrm{N}'x - \mathrm{N}y = 0, \qquad \mathrm{N}x + \mathrm{N}'(y-\mathrm{L}) = 0, \qquad -y(y-\mathrm{L}) - x^2 = 0$$

en x, y sont compatibles et admettent un système de solutions $x = a$, $y = b$, en sorte que tous les points de la droite D parallèle à Oz, qui est l'intersection des plans $x = a$, $y = b$, décrivent des segments de droite.

Si l'on veut introduire dans les formules (1) les coordonnées a, b de cette droite, on trouvera qu'on peut poser, k désignant un coefficient

constant,

$$N = ka, \quad N' = kb, \quad L = \frac{a^2 + b^2}{b},$$

et il vient alors

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a^2 + b^2}{b} \sin\theta + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta, \\ z_1 = k\,[a\sin\theta - b\,(1 - \cos\theta)] + z. \end{cases}$$

Représentation du mouvement.

Pour nous faire une réprésentation de ce mouvement, nous allons chercher les surfaces lieux des axes du mouvement hélicoïdal tangent, surfaces qui, nous le savons, roulent l'une sur l'autre en glissant suivant la génératrice le long de laquelle elles se raccordent.

Observons que le plan des $x_1 O_1 y_1$ ayant une direction invariable dans la figure mobile comme dans l'espace, la projection de la figure mobile sur ce plan est une figure de forme invariable dont le mouvement accompagne le mouvement de la figure de l'espace.

Les deux premières équations (4) représentent ce mouvement, et c'est un exercice facile de démontrer que les lieux du centre instantané dans la figure et dans le plan fixe sont deux cercles Ω et Ω_1, le second de rayon double de celui du premier et qui se touchent intérieurement.

On peut encore remarquer que le point $x = 0$, $y = 0$ décrit l'axe $O_1 x_1$, tandis que le point $x = a$, $y = b$ décrit la droite

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b}.$$

On est donc bien dans le cas du mouvement de l'ellipsographe décrit à la page 164, et ce mouvement résulte du roulement intérieur sans glissement d'un cercle Ω sur un cercle de rayon double Ω_1.

Maintenant, pour passer du mouvement de la projection de la figure sur le plan $x_1 O_1 y_1$ au mouvement de la figure elle-même dans l'espace, il suffira de lui imprimer un glissement suivant l'axe $O_1 z_1$. Si donc on considère les deux cylindres Γ, Γ_1 qui ont leurs génératrices parallèles à $O_1 z_1$ et qui ont respectivement Ω et Ω_1 pour bases, ces deux cylindres constituent précisément les deux surfaces qui, suivant la locution de Reuleaux, *virent* au cours du mouvement. Ces cylindres sont à chaque instant tangents suivant une génératrice et roulent l'un sur l'autre en glissant, mais avec cette circonstance expresse que le glissement a lieu suivant la génératrice de contact.

La loi de ce glissement est donnée par la condition qu'un point

de la droite appelée D (et, en conséquence, tous les points de cette droite) décrive un segment de droite, nécessairement situé dans le plan que décrit la droite D.

Le mouvement ainsi défini est une extension naturelle du mouvement de l'ellipsographe, mouvement que l'on retrouverait d'ailleurs si, dans les formules (4), on prenait $k = 0$.

Signalons, pour terminer ce sujet, ce fait qu'une droite quelconque de la figure mobile engendre dans ce mouvement une surface du quatrième degré. Il en sera de même évidemment dans le mouvement inverse, d'après un théorème énoncé au début.

Examen des cas écartés au début.

3. Il reste à examiner le cas où les plans des trajectoires, au lieu d'être quelconques dans l'espace E, seraient des plans exceptionnels dépendant seulement de deux ou même d'un seul paramètre.

Il faudrait alors qu'un même plan Π contînt les trajectoires d'une infinité de points de la figure mobile. S'il en était ainsi, et si, de plus, trois des points A, B, C dont les trajectoires sont dans le plan Π formaient un triangle, nous nous trouverions dans le cas où un plan de la figure glisse sur lui-même. Alors, en effet, tous les points de la figure mobile décrivent des courbes planes; et les plans de ces courbes sont parallèles.

Le raisonnement cesserait de s'appliquer si les points A, B, C, ... de la figure mobile qui décrivent un même plan Π étaient en ligne droite. Alors les points de la figure mobile se trouveraient distribués sur des droites Δ et chacune de ces droites Δ décrirait un plan. En menant par un point fixe O des parallèles à ces droites Δ, on aurait autour de ce point une infinité de droites formant entre elles des angles invariables et qui devraient décrire chacune un plan fixe passant par le point O. Un tel mouvement est impossible.

A ce raisonnement échappe, il est vrai, le cas où les droites Δ seraient toutes parallèles entre elles. Mais alors les plans balayés Π doivent être tous parallèles à une même droite Δ_0 à laquelle resteraient aussi parallèles toutes les droites Δ qui décrivent chacune un plan Π. Si l'on appelle Φ un plan normal à Δ_0, ce plan Φ aura une direction invariable dans l'espace aussi bien que dans la figure mobile; et si l'on considère alors la projection de la figure sur ce plan, on obtiendra une figure plane de forme invariable dont les divers points décriront les projections des trajectoires des points de l'espace. Or, ces trajectoires sont dans des plans Π normaux au plan Φ; leurs projections sont donc les traces mêmes de ces plans; et nous avons ainsi un mouvement plan dans lequel tous les points

décrivent des droites. Il ne peut s'agir, dès lors, que d'un mouvement de translation; tous les plans Π sont parallèles, puisque leurs traces sur le plan Φ doivent l'être.

Dans le mouvement dans l'espace tous ces plans Π vont donc glisser, chacun sur lui-même, puisque, pour passer du mouvement en projection au mouvement dans l'espace, il suffit d'introduire un glissement normal au plan Φ et parallèle, par conséquent, aux plans Π. Nous retombons donc dans un cas de figure mobile dans laquelle une famille de plans parallèles glissent sur eux-mêmes.

Conclusion de cet examen.

En résumé, en dehors du mouvement étudié dans le paragraphe 2 et du mouvement d'une figure de forme invariable dont un plan glisse sur lui-même, il n'y a pas d'autre mouvement dans lequel tous les points de la figure décrivent des courbes planes.

Emploi des formules d'Olinde Rodrigues dans l'étude des mouvements algébriques.

Formules du mouvement rapporté à des paramètres rationnels.

4. Le problème que nous venons de traiter nous a offert un cas particulier intéressant de mouvement algébrique. Les variables d'Olinde Rodrigues se prêtent d'une façon particulière à l'étude de ces sortes de mouvements.

Si l'on introduit les paramètres homogènes λ, μ, ν, ρ qui permettent d'exprimer rationnellement les 9 cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle mobile par rapport à un trièdre fixe, les formules générales du mouvement continu d'une figure dans l'espace, mises sous la forme d'une transformation homographique entre coordonnées homogènes, peuvent s'écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} X &= At + H[(\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x + 2(\lambda\mu-\nu\rho)y + 2(\lambda\nu+\mu\rho)z],\\ Y &= Bt + H[2(\lambda\mu+\nu\rho)x + (\rho^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)y + 2(\mu\nu-\lambda\rho)z],\\ Z &= Ct + H[2(\lambda\nu-\mu\rho)x + 2(\mu\nu+\lambda\rho)y + (\rho^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2)z],\\ T &= H(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2)t; \end{aligned}\right.$$

dans ces formules, A, B, C, H, ρ, λ, μ, ν représentent des paramètres indépendants. En prenant pour ces paramètres des fonctions algébriques de une ou plusieurs variables, on définira des mouvements algébriques, et les mouvements algébriques les plus généraux.

Mouvements algébriques unicursaux.

Par exemple, en prenant pour ces paramètres des fonctions rationnelles d'une même variable, on obtiendra les mouvements algébriques

unicursaux, c'est-à-dire ceux dans lesquels tout point de la figure décrit une courbe unicursale.

En prenant des fonctions rationnelles de deux variables, on obtiendra les mouvements unicursaux à deux variables, dans lequel tout point de la figure décrit une surface unicursale ou, comme on le dit encore, une surface représentable sur un plan point par point, de même que les courbes unicursales sont représentables point par point sur une droite.

Mouvement cubiques gauches.

Il est, par exemple, aisé d'obtenir des mouvements dans lesquels tous les points de la figure décrivent des cubiques gauches. Il suffira de prendre pour λ, μ, ν, ρ, H des fonctions linéaires entières d'un paramètre u, et pour A, B, C des polynômes du troisième degré en u.

Lorsque λ, μ, ν, ρ sont fonctions linéaires entières d'un même paramètre u, comme dans le cas actuel, il existe entre λ, μ, ν, ρ deux équations linéaires et homogènes. Grâce à une transformation de coordonnées, qui se traduit par les formules (1)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda' &= -l\rho - r\lambda - n\mu + m\nu,\\ \mu' &= -m\rho - r\mu - l\nu + n\lambda,\\ \nu' &= -n\rho - r\nu - m\lambda + l\mu,\\ \rho' &= \quad r\rho - l\lambda - m\mu - n\nu,\end{aligned}\right.$$

on peut toujours supposer que l'on ait ramené l'une de ces deux équations à la forme $\rho = 0$.

Lorsque $\rho = 0$, les formules (5) représentent un renversement (voir la formule (6) de la note I) suivi d'une translation; la droite autour de laquelle s'effectue le renversement passe à l'origine du trièdre fixe et a des cosinus directeurs proportionnels à λ, μ, ν. Puisque, dans le cas actuel, il subsiste une relation linéaire entre λ, μ, ν, c'est que cette droite décrit un plan fixe, et on peut alors supposer que ce soit le plan des $x_1 O_1 y_1$, en sorte que ν se trouvera nul.

En un mot, nous pouvons supposer que l'on ait $\nu = 0$, $\rho = 0$. Alors, par une transformation homographique portant sur le paramètre u, on pourra supposer que l'on a

$$\lambda = 1, \quad \mu = u, \quad \nu = 0, \quad \rho = 0;$$

les formules (5) se simplifient et donnent

$$\begin{aligned} X &= f(u)\,t + (a + bu)\,[(1 - u^2)\,x + 2uy],\\ Y &= \varphi(u)\,t + (a + bu)\,[2u\,.\,x - (1 - u^2)\,y],\\ Z &= \psi(u)\,t + (a + bu)\,(1 + u^2)\,z,\\ T &= (a + bu)\,(1 + u^2)\,t,\end{aligned}$$

(1) Voir la note *sur la composition des rotations et les quaternions.*

f, φ, ψ désignent des polynômes du troisième degré en u. En développant les expressions de X, Y, Z, T, on trouvera

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \mathcal{A}_1.u^3 + \mathcal{B}_1.u^2 + \mathcal{C}_1.u + \mathcal{D}_1,\\ Y &= \mathcal{A}_2.u^3 + \mathcal{B}_2.u^2 + \mathcal{C}_2.u + \mathcal{D}_2,\\ Z &= \mathcal{A}_3.u^3 - \mathcal{B}_3.u^2 + \mathcal{C}_3.u + \mathcal{D}_3,\\ T &= \mathcal{A}_4.u^3 + \mathcal{B}_4.u^2 + \mathcal{C}_4.u + \mathcal{D}_4,\end{aligned}\right.$$

où les $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$ sont des fonctions linéaires de x, y, z, t. On se rendra compte aisément que tous les points situés sur la surface représentée par l'équation

$$S = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_1\\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_2\\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{D}_3\\ \mathcal{A}_4 & \mathcal{B}_4 & \mathcal{C}_4 & \mathcal{D}_4 \end{vmatrix} = 0$$

décrivent des courbes du troisième ordre *planes*.

Le lecteur effectuera les calculs et vérifiera que cette surface est un cylindre circulaire droit.

Mouvement à biquadratiques unicursales.

5. Supposons maintenant que l'on ait pris pour λ, μ, ν, ρ des polynômes du second degré d'un paramètre u; il existera encore une relation linéaire entre λ, μ, ν, ρ et l'on pourra supposer que cette relation s'écrit $\rho = 0$.

Si l'on prend alors pour A, B, C des polynômes du quatrième degré et pour H un polynôme du second, on obtient un mouvement dans lequel tous les points du corps décrivent des courbes du quatrième ordre unicursales, qui sont ici des quartiques de Steiner. Cependant, on observera que X, Y, Z, T se développent sous la forme

$$\mathcal{A}_i u^4 + \mathcal{B}_i u^3 + \mathcal{C}_i u^2 + \mathcal{D}_i u + \mathcal{E}_i,$$

et les points pour lesquels les déterminants tels que

$$\begin{aligned} \|\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{B}_i\, \mathcal{C}_i\, \mathcal{D}_i \,\| &= 0,\\ \|\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{B}_i\, \mathcal{C}_i\, \mathcal{E}_i \,\| &= 0, \end{aligned}$$

seront nuls décriront des courbes planes unicursales du quatrième ordre. Ces points seront naturellement répartis sur une courbe.

Il y aurait intérêt à approfondir l'étude de ce mouvement, aussi bien que du précédent, et à rechercher, par exemple, quelles sont les surfaces dont la viration peut servir à les représenter.

Mais nous nous en tiendrons à ces indications pour aborder la question des mouvements unicursaux à deux paramètres.

Mouvement à surfaces de Steiner.

6. Reprenons les formules (5) du numéro 4 et regardons-y les paramètres λ, μ, ν, ρ, H, A, B, C comme des fonctions de deux variables. Une des hypothèses les plus simples consiste à prendre pour λ, μ, ν, ρ des fonctions linéaires des deux variables en question.

Il en résulte alors une équation linéaire homogène entre λ, μ, ν, ρ; et, grâce à un changement de coordonnées, on pourra supposer que cette équation a pris la forme $\rho = 0$. Nous avons déjà appliqué cette remarque.

Dans ces conditions, on pourra prendre comme variables indépendantes les quotients $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, ou, si l'on veut, faire usage d'un système de trois variables homogènes λ, μ, ν. Alors A, B, C seront des fonctions entières homogènes de degré m de λ, μ, ν et H une fonction entière homogène de degré $m - 2$.

Faisons, en particulier, l'hypothèse $m = 2$; alors H se réduit à une constante et A, B, C sont des formes quadratiques ternaires en λ, μ, ν.

Les coordonnées X, Y, Z, T d'un point M quelconque de la figure mobile sont alors proportionnelles à des polynômes homogènes et du second degré des paramètres λ, μ, ν. La surface décrite par le point M est ce que l'on appelle une *surface de Steiner*. Cette surface est du quatrième degré, admet trois droites doubles; il y a quatre plans qui lui sont tangents, chacun en tous les points d'une conique. Enfin, tout plan tangent à la surface la coupe suivant un système de deux coniques. Il nous suffit de rappeler ces faits dont la démonstration ne saurait trouver place ici.

Points qui décrivent des plans.

Il est intéressant de constater qu'il y a en général des points qui décrivent des plans.

En effet, écrivons explicitement les équations du mouvement en prenant $H = 1$, ainsi que cela est manifestement permis. Nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} X = f_1(\lambda, \mu, \nu)\, t + (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\, x + 2\lambda\mu y + 2\lambda\nu z, \\ Y = f_2(\lambda, \mu, \nu)\, t + 2\lambda\mu x + (-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)\, y + 2\mu\nu z, \\ Z = f_3(\lambda, \mu, \nu)\, t + 2\nu\lambda x + 2\nu\mu y + (-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)\, z, \\ T = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\, t, \end{cases}$$

où f_1, f_2, f_3 sont trois polynômes homogènes en λ, μ, ν, tels que

$$f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda^2 + a'_i\mu^2 + a''_i\nu^2 + 2b_i\mu\nu + 2b'_i\nu\lambda + 2b''_i\lambda\mu.$$

Écrivons que x, y, z, t sont tellement choisis qu'entre X, Y, Z, T

il existe une relation de la forme

$$lX + mY + nZ + pT = 0,$$

on aura, en faisant, pour simplifier, $t = 1$:

$$\begin{aligned}
&l(a_1 + x) + m(a_2 - y) + n(a_3 - z) + p = 0,\\
&l(a'_1 - x) + m(a'_2 + y) + n(a'_3 - z) + p = 0,\\
&l(a''_1 - x) + m(a''_2 - y) + n(a''_3 + z) + p = 0,\\
&lb_1 + m(b_2 + z) + n(b_3 + y) = 0,\\
&l(b'_1 + z) + mb'_2 + n(b'_3 + x) = 0,\\
&l(b''_1 + y) + m(b''_2 + x) + nb''_3 = 0;
\end{aligned}$$

formules que l'on peut écrire

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&P + lx - my - nz + p = 0,\\
&Q - lx + my - nz + p = 0,\\
&R - lx - my + nz + p = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&P' + mz + ny = 0,\\
&Q' + lz + nx = 0,\\
&R' + ly + mx = 0,
\end{aligned}\right.$$

P, Q, R, P', Q', R' désignant des fonctions linéaires homogènes de l, m, n.

Des équations (10) on tire

$$(11)\qquad lP' + mQ' - nR' = -2lmz,$$

et des équations (9)

$$(12)\qquad P + Q - 2nz + 2p = 0$$

l'élimination de z entre les équations (11) et (12), nous donnera

$$(P + Q)\,lm + n(lP' + mQ' - nR') + 2lmp = 0,$$

d'où résultera, en procédant par voie de permutation circulaire,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
2p &= \frac{(-lP' - mQ' + nR')\,n - (P + Q)\,lm}{lm},\\
&= \frac{(lP' - mQ' - nR')\,l - (Q + R)\,mn}{mn},\\
&= \frac{(-lP' + mQ' - nR')\,m - (R + P)\,nl}{nl}.
\end{aligned}\right.$$

En égalant les diverses valeurs de p on trouve

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&(m^2 + n^2)(nR' - mQ') + l(m^2 - n^2)P' + (R - Q)\,lmn = 0,\\
&(n^2 + l^2)(lP' - nR') + m(n^2 - l^2)Q' + (P - R)\,lmn = 0,\\
&(l^2 + m^2)(mQ' - lP') + n(l^2 - m^2)R' + (Q - P)\,lmn = 0.
\end{aligned}\right.$$

La somme de ces trois équations est nulle, en sorte qu'elles ne constituent, au fond, qu'un système de deux équations homogènes entre l, m, n.

Il faudra prendre pour l, m, n un système de solutions qui fournisse pour p, par les formules (13), et pour x, y, z par la formule (12) et les formules obtenues par permutation circulaire, des valeurs acceptables.

Chacune des solutions qui rempliront ces conditions donnera un point de la figure décrivant un plan.

Or, les équations (14) en l, m, n représentent trois courbes du quatrième degré passant par les mêmes 16 points, si l'on y regarde l, m, n comme les coordonnées homogènes d'un point dans un plan.

Sur ces 16 points, il y en a six qui ne fournissent pas de valeur satisfaisante pour p. Ce sont les points définis par

$$l = 0, \quad mQ' - nR' = 0,$$

ou bien

$$m = 0, \quad nR' - lP' = 0,$$

ou bien enfin

$$n = 0, \quad lP' - mQ' = 0.$$

Il reste seulement dix solutions acceptables, en sorte *qu'en général il existe, dans le mouvement qui nous occupe, dix points de la figure qui décrivent des plans.*

Exemple particulier.

7. Ainsi, prenons le cas où l'on aurait

$$f_1 = 2\mu\nu, \quad f_2 = 2\nu\lambda, \quad f_3 = 2\lambda\mu.$$

Il est clair que P, Q, R sont nuls et que l'on a

$$P' = l, \quad Q' = m, \quad R' = n.$$

Les équations (11) et (12) et celles qu'on en déduit par permutation s'écrivent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} lx - p = 0, \quad my - p = 0, \quad nz - p = 0, \\ l^2 + m^2 - n^2 = -2lmz, \\ l^2 - m^2 + n^2 = -2lny, \\ -l^2 + m^2 + n^2 = -2mnx. \end{array} \right.$$

Il faut trouver les solutions communes à ces équations.

Excluons d'abord l'hypothèse où l'un des paramètres l, m, n serait nul. Des trois premières équations (15) on peut tirer x, y, z; et, en portant leurs valeurs dans les trois autres, il vient

$$l^2 - m^2 - n^2 = 2mn \cdot \frac{p}{l}$$

où

$$l^2(l^2 - m^2 - n^2) = 2lmnp,$$

et de même

$$m^2(-l^2 + m^2 - n^2) = 2lmnp,$$
$$n^2(-l^2 - m^2 + n^2) = 2lmnp.$$

On a donc

$$l^2(l^2 - m^2 - n^2) = m^2(-l^2 + m^2 - n^2) = n^2(-l^2 - m^2 + n^2)$$

ou encore

$$(\ \ l^2 + m^2 - n^2)(l^2 - m^2) = 0,$$
$$(\ \ l^2 - m^2 + n^2)(n^2 - l^2) = 0,$$
$$(-l^2 + m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = 0.$$

Si deux des trois quantités $l^2 + m^2 - n^2$, $l^2 - m^2 + n^2$, $-l^2 + m^2 + n^2$ sont nulles, il en est de même de l'une des quantités l, m, n; ce cas étant réservé, il faudra alors que deux des seconds facteurs $l^2 - m^2$, $n^2 - l^2$, $m^2 - n^2$ soient nuls, et alors ils le seront tous les trois.

On aura donc

$$l^2 = m^2 = n^2;$$

et de là on déduira

$$m = \alpha l, \quad n = \beta l,$$

où α, β désignent 1 ou — 1.

Les équations (15) donnent ensuite x, y, z et p,

$$p = -\frac{\alpha\beta l}{2}, \quad x = -\frac{\alpha\beta}{2}, \quad y = -\frac{\beta}{2}, \quad z = -\frac{\alpha}{2}.$$

Comme on a pour α, β quatre combinaisons de signes + et — possibles, nous obtenons de la sorte quatre points, à savoir les points :

1° $x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = -\frac{1}{2}$

décrivant le plan $X + Y + Z - \frac{1}{2} = 0$;

2° $x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$

décrivant le plan $-X + Y + Z + \frac{1}{2} = 0$;

3° $x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$

décrivant le plan $X - Y + Z + \frac{1}{2} = 0$;

4° $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$

décrivant le plan $X + Y - Z + \frac{1}{2} = 0$.

Ces quatre premières solutions sont fournies par un point $x = y = z = -\frac{1}{2}$ et ses symétriques par rapport aux axes du trièdre $Oxyz$.

Les quatre plans décrits sont le plan $X + Y + Z = \frac{1}{2}$ et ses symétriques par rapport aux axes du trièdre fixe OXYZ.

Voyons maintenant si l'hypothèse que l ou m ou n soit nul donnera une solution.

Si l'on suppose $l = 0$, x restant fini, on doit avoir, d'après les équations (15), $p = 0$; et si m, n ne sont pas nuls en même temps, on a $y = 0$, $z = 0$. Les équations (15) donnent alors

$$m^2 = n^2,$$

et puis

$$x = -\frac{m}{n}.$$

On a donc les solutions

$$l = 0, \quad m = 1, \quad n = a, x = -a, \quad y = z = 0,$$

où $a = \pm 1$. On a ainsi deux solutions correspondant à l'hypothèse $l = 0$; les hypothèses $m = 0$, $n = 0$ en donneront chacune deux autres, ce qui fera en tout six nouvelles solutions, dont voici le tableau :

1° Le point $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ décrit le plan $Y + Z = 0$;
2° Le point $x = -1$, $y = 0$, $z = 0$ décrit le plan $Y - Z = 0$;
3° Le point $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ décrit le plan $X + Z = 0$;
4° Le point $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$ décrit le plan $X - Z = 0$;
5° Le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ décrit le plan $X + Y = 0$;
6° Le point $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ décrit le plan $X - Y = 0$.

Donc, en tout dix points décrivent des plans.

Exemple d'abaissement du nombre des points.

8. Dans certains cas, ce nombre dix se trouve abaissé.

Prenons, par exemple,

$$f_1 = -\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad f_2 = \lambda^2 + \nu^2 - \mu^2, \quad f_3 = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2.$$

On trouve

$$P = -l + m + n, \quad Q = l - m + n, \quad R = -l + m + n,$$
$$P' = 0, \quad Q' = 0, \quad R' = 0.$$

Les équations (9) deviennent

$$\begin{aligned} -l(x-1)+m(y-1)+n(z-1)&=p,\\ l(x-1)-m(y-1)+n(z-1)&=p,\\ l(x-1)+m(y-1)-n(z-1)&=p; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par addition des équations deux à deux

$$l(x-1)+m(y-1)+n(z-1)=3p,$$

(16) $$l(x-1)=p,\quad m(y-1)=p,\quad n(z-1)=p;$$

les équations (10) s'écrivent, du reste,

(17) $$mz+ny=0,\quad lz+nx=0,\quad ly+mx=0.$$

Si l, m, n ne sont pas nuls, les équations (17) prouvent que x, y, z doivent l'être; on a ainsi la solution

$$x=0,\quad y=0,\ z=0,\qquad l=m=n=-p.$$

Si, au contraire, l, par exemple, est nul, on a $p=0$, et si ni m ni n ne sont nuls, on doit avoir $y=1$, $z=1$.

Les équations (17) donnent alors $x=0$, $m=-n$. On a donc la solution

$$x=0,\quad y=1,\quad z=1,\quad l=p=0,\quad m=-n.$$

L'hypothèse $m=0$ et l'hypothèse $n=0$ donneront de même les solutions

$$x=1,\quad y=0,\quad z=1,\quad m=p=0,\quad l=-n$$

et

$$x=1,\quad y=1,\quad z=0,\quad n=p,\quad l=-m.$$

Mais deux des quantités l, m, n peuvent être nulles. Soit $m=n=0$; on a $p=0$ et, comme l ne peut être nul, il vient $x=1$. Les équations (17) donnent alors $y=z=0$. D'où la solution

$$x=1,\quad y=z=0,\quad m=n=p=0.$$

On aurait de même les solutions

$$\begin{aligned} x&=0,\quad y=1,\quad z=0,\quad l=n=p=0,\\ x&=0,\quad y=0,\quad z=1,\quad l=m=p=0. \end{aligned}$$

On trouve de la sorte sept points qui décrivent des plans et *sept seulement*. Ces sept points sont sept sommets d'un cube.

Le huitième sommet est le point $x=y=z=1$; et décrit, comme tous les autres points du corps mobile, une surface de Steiner; pour ce point, en effet, les formules (8) donnent

$$X=2\lambda(\mu+\nu),\quad Y=2\mu(\lambda+\nu),\quad Z=2\nu(\lambda+\mu),\quad T=\lambda^2+\mu^2+\nu^2,$$

et la surface ainsi représentée est bien une surface du quatrième degré de Steiner ***sans abaissement***.

Du degré de la surface trajectoire d'un point.

9. Ici, se présente, sous une forme particulière, une question générale dont nous allons dire quelques mots.

Reprenons les formules (5). Si l'on regarde H comme une constante qu'on pourra prendre égale à 1, si λ, μ, ν, ρ sont des polynômes de deux paramètres u, v du degré p et A, B, C des polynômes du degré $2p$ de ces mêmes paramètres, tout point du corps décrit une surface du degré $4p^2$, du moins en général.

Posons, en effet,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(u,v) &= \mathrm{A}t + (\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x + 2(\lambda\mu-\nu\rho)y + 2(\lambda\nu+\mu\rho)z,\\
\Phi_2(u,v) &= \mathrm{B}t + 2(\lambda\mu+\nu\rho)x + \dots,\\
\Phi_3(u,v) &= \mathrm{C}t + 2(\lambda\nu-\mu\rho)x + \dots,\\
\Phi_4(u,v) &= (\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2)t.
\end{aligned}$$

Représentation sur le plan.

Les équations (5) deviennent

$$\mathrm{X} = \Phi_1(u, v), \quad \mathrm{Y} = \Phi_2(u, v) \quad \mathrm{Z} = \Phi_3(u, v), \quad \mathrm{T} = \Phi_4(u, v);$$

ces formules constituent une représentation sur le plan de la surface trajectoire du point (x, y, z, t). A tout point (u, v) du plan (u, v désignant dans le plan des coordonnées rectilignes) correspond un point de la surface; à toute courbe tracée sur la surface correspond une courbe tracée sur le plan et réciproquement. En particulier l'intersection de la surface par le plan

$$l\mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z} + p\mathrm{T} = 0$$

se trouve représentée par la courbe plane dont l'équation est

$$(18) \qquad l\Phi_1 + m\Phi_2 + n\Phi_3 + p\Phi_4 = 0,$$

et cette courbe plane est du degré $2p$.

Considérons une droite quelconque Δ dans l'espace; menons par cette droite deux plans Π, Π' représentés par les équations $l\mathrm{X} + \dots = 0$, $l'\mathrm{X} + \dots = 0$; les sections de la surface par ces plans sont respectivement représentées par les deux courbes

$$(19) \qquad \begin{cases} l\Phi_1 + m\Phi_2 + n\Phi_3 + p\Phi_4 = 0,\\ l'\Phi_1 + m'\Phi_2 + \dots \qquad = 0.\end{cases}$$

Les points où la droite Δ perce la surface correspondent à des points de rencontre de ces deux courbes planes de degré $2p$. Considérons, réciproquement, un point commun à ces deux courbes planes. Si les coordonnées u, v de ce point n'annulent pas les quatre

fonctions Φ à la fois, il lui correspond un point (X, Y, Z, T) déterminé, qui est évidemment un des points de rencontre de la droite Δ et de la surface.

Mais si u, v annulent à la fois tous les Φ, la conclusion ne subsiste plus; les formules qui donnent X, Y, Z, T sont indéterminées et les valeurs u, v ne correspondent plus à un point de rencontre de Δ avec la surface.

Pour avoir le nombre des points de rencontre de la droite arbitraire Δ avec la surface, il faut donc compter en combien de points variables avec $l, m, n, p, l', m', n', p'$ se coupent les courbes (19) et faire abstraction des points fixes par lesquels il se peut que viennent passer toutes les courbes planes contenues dans l'équation (18); ces points fixes ont reçu le nom générique de points de *base* de la représentation.

S'il n'y a pas de points de base, les courbes (19) se coupent en $4p^2$ points variables; et $4p^2$ est, dès lors, le degré de la surface décrite.

L'abaissement de ce nombre est subordonné à la question de l'existence des points de base.

Examen des conditions d'abaissement du degré.

Il pourra arriver, par exemple, que les courbes $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ aient des points communs. Le degré des surfaces trajectoires s'en trouvera abaissé. Mais ce n'est pas le seul cas.

Observons d'abord que les points de base doivent vérifier l'équation $\Phi_4 = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0.$$

On a ensuite les identités

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} A\rho + B\nu - C\mu &= \rho\Phi_1 + \nu\Phi_2 - \mu\Phi_3 - \frac{\rho x}{t}\Phi_4,\\ B\rho + C\lambda - A\nu &= \rho\Phi_2 + \lambda\Phi_3 - \nu\Phi_1 - \frac{\rho y}{t}\Phi_4,\\ C\rho + A\mu - B\lambda &= \rho\Phi_3 + \mu\Phi_1 - \lambda\Phi_2 - \frac{\rho z}{t}\Phi_4,\\ A\rho + B\mu - C\nu &= \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2 - \nu\Phi_3 - \frac{\lambda x + \mu y \nu z}{t}\Phi_4; \end{aligned}\right.$$

et, par suite, les points de base, puisqu'ils annulent Φ_1, Φ_2, Φ_3, vérifieront les équations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} A\rho + B\nu - C\mu &= 0,\\ B\rho + C\lambda - A\nu &= 0,\\ C\rho + A\mu - B\lambda &= 0,\\ A\lambda + B\mu - C\nu &= 0, \end{aligned}\right.$$

qu'il faut joindre à l'équation supposée

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0. \tag{22}$$

Si les quatre courbes (21) et la courbe (22) ont des points en commun, alors seulement l'abaissement dont nous nous occupons pourra se produire ([1]).

Supposons que l'on ait un système de valeurs de u, v vérifiant à la fois les équations (21) et (22). Les identités (20) donneront, outre

$$\Phi_4 = 0,$$

les relations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \rho\Phi_1 + \nu\Phi_2 - \mu\Phi_3 &= 0,\\ \rho\Phi_2 + \lambda\Phi_3 - \nu\Phi_1 &= 0,\\ \rho\Phi_3 + \mu\Phi_1 - \lambda\Phi_2 &= 0,\\ \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2 + \nu\Phi_3 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

La dernière équation est une conséquence des trois premières dans tous les cas. Or, ces trois premières, en vertu de $\Phi_4 = 0$, se réduisent à deux relations distinctes. On verra facilement que les fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3 ne peuvent être nulles toutes les trois pour toutes les valeurs de x, y, z et qu'il suffit d'égaler à zéro l'une de celles qui ne sont pas identiquement nulles pour que les autres le soient et pour que l'abaissement ait lieu. Il suffira d'avoir, par exemple, $\Phi_1 = 0$ ou

$$At + (\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\,x + 2(\lambda\mu - \nu\rho)\,y + 2(\lambda\nu + \mu\rho)\,z = 0,$$

ou, en tenant compte de l'équation (22),

$$At + 2(\rho^2 + \lambda^2)\,x + 2(\lambda\mu - \nu\rho)\,y + 2(\lambda\nu + \mu\rho)\,z = 0.$$

L'abaissement se produira donc pour tous les points du corps contenus dans ce plan. En général cet abaissement sera de 1. L'identité

$$(\rho^2 + \lambda^2)^2 + (\lambda\mu - \nu\rho)^2 + (\lambda\nu + \mu\rho)^2 \\ = (\rho^2 + \lambda^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2) = 0$$

prouve que ce plan est un plan tangent au cercle de l'infini.

A un second système de valeurs de u, v qui vérifie les équations (21)

([1]) Un autre cas d'abaissement serait celui où des systèmes de valeurs différents de u, v donneraient le même point de la surface.

et (22), il correspondra un second plan isotrope pour les points duquel le degré s'abaissera aussi d'une unité.

Considérons deux plans isotropes correspondant à deux systèmes différents de solutions (u, v) des équations (21) et (22). Pour leur droite d'intersection l'abaissement sera de deux unités.

Pour les points d'intersection de trois de ces plans isotropes, l'abaissement serait de trois unités.

Application au mouvement à surfaces de Steiner.

10. Sans insister sur ces généralités, appliquons les remarques précédentes au cas des mouvements à surfaces de Steiner, c'est-à-dire au cas où $p = 1$.

Ainsi que nous l'avons vu, ρ peut être supposé nul.

Les équations (21) et (22) se réduisent ici au système

$$(24)\quad \begin{cases} C\mu - B\nu = 0, \quad C\lambda - A\nu = 0, \quad A\mu - B\lambda = 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0. \end{cases}$$

Si un système de valeurs des paramètres indépendants, qui seront ici $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, vérifie ces équations, nous obtiendrons un plan isotrope Π dont tous les points décrivent des surfaces du troisième ordre.

Si deux systèmes de valeurs vérifient ces équations, on obtient une droite dont tous les points décrivent des quadriques.

Les équations (24) pourront ainsi avoir en commun un certain nombre de solutions; nous allons montrer qu'elles pourront, dans certains cas, en avoir quatre et jamais davantage.

Supposons, en effet, que ces équations aient précisément quatre solutions en commun. Nous pourrons, par un changement de coordonnées, faire en sorte que les valeurs de λ, μ, ν correspondantes annulent deux formes quadratiques, dont l'une sera

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

et l'autre

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2.$$

Comme A, B, C sont des fonctions du second degré, on pourra trouver six fonctions linéaires P, Q, R, P', Q', R', ou λ, μ, ν telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} B\nu - C\mu &= P(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + P'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ C\lambda - A\nu &= Q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + Q'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ A\mu - B\lambda &= R(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + R'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2). \end{aligned}$$

On voit qu'on aura l'identité

$$(P\lambda + Q\mu + R\nu)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + (P'\lambda + Q'\mu + R'\nu)(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) = 0;$$

laquelle entraîne les deux suivantes :

$$P\lambda + Q\mu + R\nu = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2,$$
$$P'\lambda + Q'\mu + R'\nu = -(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Comme P, Q, R, P', Q', R' sont des fonctions linéaires, on peut en conclure que l'on aura

$$\begin{aligned} P &= a\lambda + q\nu - r\mu, \\ Q &= b\mu + r\lambda - p\nu, \\ R &= c\nu + p\mu - q\lambda, \\ P' &= -\lambda + q'\nu - r'\mu, \\ Q' &= -\mu + r'\lambda - p'\nu, \\ R' &= -\nu + p'\mu - q'\lambda, \end{aligned}$$

où p, q, r, p', q', r' désignent des constantes.

Il viendra ainsi

$$\begin{aligned} B\nu - C\mu = {} & (a\lambda + q\nu - r\mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\ & + (-\lambda + q'\nu - r'\mu)(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \end{aligned}$$

on encore

$$\begin{aligned} & [B - (a - c)\lambda\nu - q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - q'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2)]\nu \\ & = [C - (b - a)\lambda\mu - r(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - r'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2)]\mu. \end{aligned}$$

On voit ainsi que la fonction du second degré

$$C - (b - a)\lambda\mu - r(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - r'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2)$$

est divisible par ν et on peut poser

$$\begin{aligned} C - (b - a)\lambda\mu - r(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - r'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) \\ = \nu(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu). \end{aligned}$$

De là on déduira

$$\begin{aligned} B - (a - c)\lambda\nu - q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - q'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) \\ = \mu(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu), \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} A - (c - b)\mu\nu - p(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - p'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) \\ = \lambda(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu). \end{aligned}$$

On a ainsi les expressions de A, B, C.

En se reportant aux formules (8), on verra qu'il suffit de changer x, y, z en $x - \frac{\alpha}{2}$, $y - \frac{\beta}{2}$, $z - \frac{\gamma}{2}$ pour faire disparaître $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$ des expressions ci-dessus, et on aura simplement

$$\begin{aligned} A &= (c - b)\mu\nu + p(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + p'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ B &= (a - c)\nu\lambda + q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + q'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ C &= (b - a)\lambda\mu + r(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + r'(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2). \end{aligned}$$

On peut simplifier encore davantage en observant que si l'on effectue un transport des axes fixes, ce qui revient à changer $X - pT$, $Y - qT$, $Z - rT$ en X, Y, Z, on fait disparaître les seconds termes.

On a donc finalement

$$\begin{aligned} A &= (c-b)\,\mu\nu + p'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ B &= (a-c)\,\nu\lambda + q'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2), \\ C &= (b-a)\,\lambda\mu + r'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2). \end{aligned}$$

Les équations (21) (22) deviennent alors,

$$\begin{aligned} B\nu - C\mu &= P'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) = 0, \\ C\lambda - A\nu &= Q'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) = 0, \\ A\mu - B\lambda &= R'\,(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) = 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 0. \end{aligned}$$

En dehors des quatre solutions qui correspondent à $a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = 0$ il n'y en a pas d'autres; car les équations

$$P' = Q' = R' = 0$$

ne sont pas compatibles, leur déterminant $1 + p'^2 + q'^2 + r'^2$ étant différent de zéro, *quand il s'agit d'un mouvement réel.*

Les quatre solutions qui sont les seules existantes sont données par les formules

$$\frac{\lambda'^2}{b-c} = \frac{\mu'^2}{c-a} = \frac{\nu'^2}{a-b},$$

et si (λ', μ', ν') est l'une d'elles, les trois autres seront

$$(-\lambda', +\mu', +\nu') \qquad (+\lambda', -\mu', +\nu') \qquad (+\lambda', +\mu', -\nu').$$

Les quatre plans isotropes correspondants dont les points décrivent des surfaces du troisième degré seront définis par les équations

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda'\mu'\nu' + 2\lambda' x + 2\mu' y + 2\nu' z &= 0, \\ -\lambda'\mu'\nu' - 2\lambda' x + 2\mu' y + 2\nu' z &= 0, \\ -\lambda'\mu'\nu' + 2\lambda' x - 2\mu' y + 2\nu' z &= 0, \\ -\lambda'\mu'\nu' + 2\lambda' x + 2\mu' y - 2\nu' z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ils forment un tétraèdre dont les sommets décrivent des plans. Les points des arêtes décrivent des quadriques. Il convient d'observer que deux seulement de ces arêtes sont réelles.

Il y a sur chaque arête un point qui décrit un plan. Cela nous fait six points de plus qui décrivent des plans et, par suite, en tout dix points, comme dans le cas général des mouvements à surfaces de Steiner.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce point de détail.

Remarque sur le mouvement à surfaces de Steiner.

11. Pour terminer ce qui a trait aux mouvements généraux dans lesquels les surfaces trajectoires sont des surfaces de Steiner, nous ferons remarquer que, si l'on assujettit un des points du corps à décrire sur sa surface de Steiner une courbe unicursale du quatrième ordre, cela revient à prendre pour λ, μ, ν des polynômes du second degré d'un paramètre arbitraire u, ou encore à assujettir λ, μ, ν à une équation du second degré de la forme

$$\Omega(\lambda, \mu, \nu) = \alpha\lambda^2 + \alpha'\mu^2 + \alpha''\nu^2 + 2\beta\mu\nu + 2\beta'\mu\nu + 2\beta''\lambda\mu = 0.$$

Il est très aisé de se rendre compte que, dans ce cas, il existe une infinité de points qui décrivent une courbe plane sur leur surface de Steiner.

On a, en effet, dans ce cas général, et conformément aux équations (8), où l'on fait $t = 1$,

$$\begin{aligned} X &= (a_1 + x)\lambda^2 + (a'_1 - x)\mu^2 + (a''_1 - x)\nu^2 \\ &\qquad + 2b_1\mu\nu + 2(b'_1 + z)\nu\lambda + 2(b''_2 + y)\lambda\mu, \\ Y &= (a_2 - y)\lambda^2 + (a'_2 + y)\mu^2 + (a''_2 - y)\nu^2 \\ &\qquad + 2(b''_2 + z)\mu\nu + 2b''_2\nu\lambda + 2(b''_2 + x)\lambda\mu, \\ Z &= (a_3 - z)\lambda^2 + (a'_3 - z)\mu^2 + (a''_3 + z)\nu^2 \\ &\qquad + 2(b_3 + y)\mu\nu + 2(b'_3 + x)\nu\lambda + 2b''_3\lambda\mu, \\ T &= \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2. \end{aligned}$$

Si donc la forme quadratique $lX + mY + nZ + pT$ se trouve identique à Ω, le point (x, y, z, t) décrira une courbe contenue dans le plan $lX + mY + \ldots = 0$. Or, pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que les déterminants à 5 colonnes compris dans la matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_1 + x & a'_1 - x & a''_1 - x & b_1 & b'_1 + z & b''_1 + y \\ a_2 - y & a'_2 + y & a''_2 - y & b_2 + z & b'_2 & b''_2 + x \\ a_3 - z & a'_3 - z & a''_3 + z & b_3 + y & b'_3 + x & b''_3 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \beta & \beta' & \beta'' \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

soient nuls. Cela a lieu pour tous les points (x, y, z) situés sur une certaine courbe du sixième ordre. Cette courbe passe par les dix points qui décrivent des plans

Sur les mouvements dans lesquels certains points du corps décrivent des plans ou des courbes planes.

12. Les développements qui précèdent ont manifesté l'intérêt qui s'attache à la recherche des conditions dans lesquelles un nombre

fini ou infini de points du corps décrivent des plans ou des courbes planes.

Je terminerai cette étude en reproduisant les indications que j'ai données autrefois sur ce problème, dans mon enseignement à la Faculté des sciences, en 1881.

Examen du cas où deux points décrivent des plans.

Supposons, par exemple, que l'on assujettisse un certain nombre de points à décrire des plans; il pourra se faire que, par le fait même, d'autres points décrivent également des plans.

Examinons, par exemple, le cas de deux points A, A' qui décrivent deux plans Π, Π'. On peut supposer que A est l'origine du trièdre mobile et A' un point de l'axe Ox. On peut prendre le plan Π pour le plan $Z = 0$, tandis que Π', *s'il n'est pas parallèle au plan* Π, sera pris passant par l'axe OX, de sorte que $Y + kZ = 0$ sera son équation.

Soient alors

$$(26)\qquad \begin{cases} X = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ Y = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ Z = c + \gamma x + \gamma' x + \gamma'' z, \end{cases}$$

les équations qui représentent le mouvement.

Dire que le point A décrit le plan Π, c'est dire que l'on a

$$c = 0;$$

et comme les coordonnées absolues du point A' sont

$$Y = b + \beta h, \quad Z = c + \gamma h,$$

où h est $l'x$ du point A', l'équation

$$b + h\beta + k(c + h\gamma) = 0$$

exprime que le point A' décrit le plan Π'. Ces équations s'écrivent encore

$$(27)\qquad b = -h(\beta + k\gamma), \quad c = 0.$$

Si, en vertu de ces conditions, un troisième point x, y, z doit décrire le plan $lX + mY + nZ + p = 0$, il faut que l'équation de condition

$$(28)\quad l(a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m(b + \beta x + \beta' y + \beta'' z) \\ + n(c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) + p = 0$$

résulte des équations (27) ou qu'elle devienne une identité lorsque l'on y remplace b, c par leurs valeurs (27). Or, on trouve ainsi l'équation

$$la + l(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m[(x - h)\beta + \alpha' y + \beta'' z] \\ - mhk\gamma + n(\gamma x + \gamma' y \gamma'' z) + p = 0.$$

Pour que cette équation n'établisse aucune relation nouvelle entre a et les cosinus (x, y, z ne pouvant être nuls, sans quoi le nouveau point coïnciderait avec A, ni être égaux à h, 0, 0, sans quoi il coïnciderait avec A'), il faudrait avoir $l = m = n = p = 0$, solution inacceptable.

Le problème ne comporte donc pas de solution si les plans Π, Π' ne sont pas parallèles.

Par contre, si Π et Π' sont parallèles, il est clair que tout autre point de la droite AA' décrit un plan parallèle aux précédents.

Examen du cas où trois points décrivent des plans formant un trièdre.

13. Examinons de même le cas où trois points A, A', A'' décrivent trois plans Π, Π', Π''. On pourra supposer que ces trois points sont dans le plan $z = 0$, en sorte que leurs coordonnées seront $(x_1, y_1, 0)$ $(x_2, y_2, 0)$ $(x_3, y_3, 0)$. Soient $l_1 X + m_1 Y + n_1 Z + p = 0$, $l_2 X + m_2 Y + n_2 Z + p_2 = 0$, $l_3 X + m_3 Y + n_3 Z + p_3 = 0$, les équations des trois plans Π, Π', Π'', que nous supposerons d'abord former un trièdre. Il est aisé de se rendre compte que, dans cette hypothèse, il n'arrivera jamais qu'un quatrième point décrira un plan, *comme conséquence* de ce que A, A' A'' décrivent les plans Π, Π', Π''.

En effet, les équations qui expriment ces dernières conditions s'écrivent

$$(29)\quad \begin{cases} P_1 = l_1 (a + \alpha x_1 + \alpha' y_1) + m_1 (b + \beta x_1 + \beta' y_1) \\ \qquad\qquad + n_1 (c + \gamma x_1 + \gamma' y_1) + p_1 = 0, \\ P_2 = l_2 (a + \alpha x_2 + \alpha' y_2) + m_2 (b + \beta x_2 + \beta' y_2) \\ \qquad\qquad + n_2 (c + \gamma x_2 + \gamma' y_2) + p_2 = 0, \\ P_3 = l_3 (a + \alpha x_3 + \alpha' y_3) + m_3 (b + \beta x_3 + \beta' y_3) \\ \qquad\qquad + n_3 (c + \gamma x_3 + \gamma' y_3 + p_3 = 0. \end{cases}$$

Supposons que, comme conséquence de ces équations, l'équation

$$(30)\quad \begin{cases} P = l(a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m(b + \beta x + \beta' y + \beta'' z) \\ \qquad\qquad + n(b + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) + p = 0, \end{cases}$$

qui exprime que le point (x, y, z) décrit le plan $lX + mY + nZ + p = 0$, se trouve vérifiée.

Comme le déterminant $\Sigma \pm l_1 m_2 n_3$ n'est pas nul, puisque les plans Π, Π', Π'' forment un vrai trièdre, on pourra tirer a, b, c des équations (29) et, en portant ces valeurs dans l'équation (30), il restera une relation linéaire entre α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', qui devra être une identité.

Cela exigera que les coefficients de α, α', ... dans cette relation iden-

tique soient tous nuls. On a donc entre P_1, P_2, P_3 une relation identique de la forme

$$(31) \qquad P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3,$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont des constantes dont aucune n'est nulle; sans quoi, si θ_3, par exemple, était nul, l'équation $P = 0$ résulterait des équations $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ce qui ne se peut puisque, les plans Π, Π', Π'' formant un trièdre, les plans Π, Π' ne peuvent être parallèles.

Nous sommes donc amenés à discuter l'identité (31).

Cette identité se décompose dans les équations suivantes :

$$(32) \qquad \begin{cases} \theta_1 l_1 + \theta_2 l_2 + \theta_3 l_3 = l, \\ \theta_1 m_1 + \theta_2 m_2 + \theta_3 m_3 = m, \\ \theta_1 n_1 + \theta_2 n_2 + \theta_3 n_3 = n, \end{cases}$$

$$(32)' \qquad \begin{cases} \theta_1 x_1 . l_1 + \theta_2 x_2 . l_2 + \theta_3 x_3 l_3 = lx, \\ \theta_1 x_1 . m_1 + \theta_2 x_2 . m_2 + \theta_3 x_3 m_3 = mx, \\ \theta_1 x_1 . n_1 + \theta_2 x_2 . n_2 + \theta_3 x_3 n_3 = nx, \end{cases}$$

$$(32)'' \qquad \begin{cases} \theta_1 y_1 l_1 + \theta_2 y_2 l_2 + \theta_3 y_3 l_3 = ly, \\ \theta_1 y_1 m_1 + \theta_2 y_2 m_2 + \theta_3 y_3 m_3 = my, \\ \theta_1 y_1 n_1 + \theta_2 y_2 n_2 + \theta_3 y_3 n_3 = ny, \end{cases}$$

$$(32)''' \qquad \begin{cases} 0 = lz, \\ 0 = mz, \\ 0 = nz, \end{cases}$$

$$(32)^{\text{IV}} \qquad \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \theta_3 p_3 = p.$$

Les équations (32)''' entraînent la relation $z = 0$, car l'hypothèse $l = m = n = 0$ est inacceptable.

Les équations (32) (32)' (32)'' prouvent que les équations homogènes en u_1, u_2, u_3, u

$$(33) \qquad \begin{cases} l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 = lu, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 = mu, \\ n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3 = nu, \end{cases}$$

admettent les trois systèmes de solutions

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 1)\ (\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \theta_3 x_3, x)\ (\theta_1 y_1, \theta_2 y_2, \theta_3 y_3, y).$$

Deux au moins de ces systèmes de solutions sont distincts, car il faudrait sans cela que l'on eût à la fois

$$x_1 = x_2 = x_3 = x, \; y_1 = y_2 = y_3 = y;$$

tous les points coïncideraient.

Le système linéaire (33) est donc indéterminé et les déterminants à 9 termes compris dans la matrice

$$\left\|\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l \\ m_1 & m_2 & m_3 & m \\ n_1 & n_2 & n_3 & n \end{matrix}\right\|$$

sont nuls, ce qui est impossible, puisque les plans Π, Π', Π″ forment un vrai trièdre.

Ainsi : *jamais la condition que trois points* A, A', A″ *décrivent les faces d'un trièdre n'entraînera le fait d'un quatrième point décrivant lui aussi un plan.*

Examen du cas où trois points décrivent trois plans parallèles à une même droite.

14. Supposons donc que les plans Π, Π', Π″ soient parallèles à une même droite ; on peut supposer que ce soit la droite OZ et alors $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Les équations (29) deviennent

$$(34)\begin{cases} l_1 a + m_1 b + l_1(\alpha x_1 + \alpha' y_1) + m_1(\beta x_1 + \beta' y_1) + p_1 = 0, \\ l_2 a + m_2 b + l_2(\alpha x_2 + \alpha' y_2) + m_2(\beta x_2 + \beta' y_2) + p_2 = 0, \\ l_3 a + m_3 b + l_3(\alpha x_3 + \alpha' y_3) + m_3(\beta x_3 + \beta' y_3) + p_3 = 0, \end{cases}$$

L'équation qui exprime que le point (x, y, z) décrit le plan (l, m, n, p).

$$(35)\begin{cases} la + mb + nc + l(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m(\beta x + \beta' y + \beta'' z) \\ \qquad\qquad + n(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) + p = 0, \end{cases}$$

doit être une conséquence des équations (34). Comme on écarte le cas déjà traité où les trois plans seraient parallèles, l'un au moins des déterminants $l_2 m_3 - m_2 l_3$, $l_3 m_1 - m_3 l_1$, $l_1 m_2 - m_1 l_2$ est différent de zéro, et deux au moins des équations (34) forment un système résoluble par rapport à a, b.

En portant ces valeurs dans la troisième équation on trouvera

$$(36)\begin{cases} (l_2 m_3 - l_3 m_2)\,[l_1(\alpha x_1 + \alpha' y_1) + m_1(\beta x_1 + \beta' y_1) + p_1], \\ + (l_3 m_1 - l_1 m_3)\,[l_2(\alpha x_2 + \alpha' y_2) + m_2(\beta x_2 + \beta' y_2) + p_2], \\ + (l_1 m_2 - l_2 m_1)\,[l_3(\alpha x_3 + \alpha' y_3) + m_3(\beta x_3 + \beta' y_3) + p_3] = 0. \end{cases}$$

tandis que l'équation (35) se réduira à une relation entre c et les cosinus. Or, cette relation devant être une conséquence de (36), la quantité c ne saurait y figurer ; elle ne doit pas figurer non plus dans l'équation (35) et, par suite, l'on a $n = 0$.

Le plan décrit par le point (x, y, z) est donc parallèle à OZ, comme les trois plans Π, Π', Π″.

Par la substitution des expressions de a, b dans l'équation (35), celle-ci devient donc une relation linéaire entre les cosinus directeurs qui doit être une conséquence de l'équation (36). Il ne faudrait pas se hâter d'en conclure que ces deux relations linéaires entre les cosinus directeurs doivent être proportionnelles terme à terme. Si, en effet, on exprime dans (36) les cosinus directeurs en fonction des paramètres λ, μ, ν, ρ d'Olinde Rodrigues, le premier membre de cette équation prend la forme d'une fraction dont $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2$ est le dénominateur et dont le numérateur est une forme quadratique en λ, μ, ν, ρ.

Si cette forme quadratique est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, l'équation (36) se trouvera décomposée, et il suffit que l'un de ces facteurs divise l'équation linéaire entre les cosinus qui résulte de (35) (les cosinus étant encore exprimés en λ, μ, ν, ρ) pour que l'équation (35) soit une conséquence de (36).

Si l'on fait abstraction de ce cas de décomposition, alors les deux équations linéaires sont bien proportionnelles terme à terme, et en conservant les notations du numéro précédent en aura encore une identité de la forme

$$P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3,$$

seulement on a maintenant $n_1 = n_2 = n_3 = n = 0$, en sorte que les équations (32) et suivantes se réduisent à

$$(37) \qquad \begin{cases} \theta_1 l_1 + \theta_2 l_2 + \theta_3 l_3 = l, \\ \theta_1 m_1 + \theta_2 m_2 + \theta_3 m_3 = m, \end{cases}$$

$$(37)' \qquad \begin{cases} \theta_1 l_1 x_1 + \theta_2 l_2 x_2 + \theta_3 l_3 x_3 = lx, \\ \theta_1 m_1 x_1 + \theta_2 m_2 x_2 + \theta_3 m_3 x_3 = mx, \end{cases}$$

$$(37)'' \qquad \begin{cases} \theta_1 l_1 y_1 + \theta_2 l_2 y_2 + \theta_3 l_3 y_3 = ly, \\ \theta_1 m_1 y_1 + \theta_2 m_2 y_2 + \theta_3 m_3 y_3 = lm, \end{cases}$$

$$(37)''' \qquad \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \theta_3 p_3 = p,,$$

équations qui expriment que le système linéaire en u_1, u_2, u_3, u,

$$\begin{aligned} l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 &= u, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 &= u \end{aligned}$$

admet les trois systèmes de solution

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, 1) \quad (\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \theta_3 x_3, x) \quad (\theta_1 y_1, \theta_2 y_2, \theta_3 y_3, y).$$

Ces trois systèmes ne sauraient être linéairement indépendants, car les déterminants $l_i m_k - l_k m_i$ ne sont pas tous nuls; on a donc

quatre relations de la forme

$$\begin{aligned} \theta_1 (\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu) &= 0, \\ \theta_2 (\lambda x_2 + \mu y_2 + \nu) &= 0, \\ \theta_3 (\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu) &= 0, \\ \lambda x + \mu y + \nu &= 0. \end{aligned}$$

Aucun des θ_i n'est nul, car si l'on avait $\theta_3 = 0$, les équations $P_1 = P_2 = 0$ entraîneraient $P = 0$ et l'on serait dans le cas que nous avons étudié au numéro 13. Aucun des θ_i n'étant nul, on voit que les équations ci-dessus expriment que les points A, A′, A″ et le point (x, y, z) sont sur une même droite du plan $z = 0$.

Il est toujours permis de supposer que cette droite est l'axe Ox, ce qui réduit à zéro y_1, y_2, y_3, y.

Le système des équations (37) et suivantes se réduit alors au suivant :

$$(38) \quad \begin{cases} \theta_1 l_1 + \theta_2 l_2 + \theta_3 l_3 = l, \\ \theta_1 m_1 + \theta_2 m_2 + \theta_3 m_3 = m, \\ \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \theta_3 p_3 = p, \end{cases}$$

$$(38)' \quad \begin{cases} \theta_1 l_1 x_1 + \theta_2 l_2 x_2 + \theta_3 l_3 x_3 = l x, \\ \theta_1 m_1 x_1 + \theta_2 l_2 x_2 + \theta_3 m_3 x_3 = m x. \end{cases}$$

La première des équations (38), jointe à la première des équations (38)′ permet d'éliminer l; on élimine de même m entre la seconde équation (38) et la deuxième équation (38)′. On trouve ainsi les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_1 l_1 (x - x_1) + \theta_2 l_2 (x - x_2) + \theta_3 l_3 (x - x_3) &= 0, \\ \theta_1 m_1 (x - x_1) + \theta_2 m_2 (x - x_2) + \theta_3 m_3 (x - x_3) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire pour θ_1, θ_2, θ_3 les valeurs proportionnelles à

$$\begin{aligned} &(l_2 m_3 - l_3 m_2)(x - x_2)(x - x_3), \\ &(l_3 m_1 - l_1 m_3)(x - x_3)(x - x_1), \\ &(l_1 m_2 - l_2 m_1)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

En transportant ces valeurs de θ_1, θ_2, θ_3 dans les équations (38) on obtiendra les expressions de l, m, p en fonction de x,

$$(39) \quad \begin{cases} l = l_1 (l_2 m_3 - l_3 m_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ \quad + l_2 (l_3 m_1 - l_1 m_2)(x - x_3)(x - x_1) \\ \quad + l_3 (l_1 m_2 - l_2 m_1)(x - x_1)(x - x_2) \\ m = m_1 (l_2 m_3 - l_3 m_2)(x - x_2)(x - x_3) \\ \quad + m_2 (l_3 m_1 - l_1 m_3)(x - x_3)(x - x_1) \\ \quad + m_3 (l_1 m_2 - l_2 m_1)(x - x_1)(x - x_2) \\ p = p_1 (l_2 m_3 - l_3 m_2)(x - x_2)(x - x_3) \\ \quad + p_2 (l_3 m_1 - l_1 m_3)(x - x_3)(x - x_1) \\ \quad + p_2 (l_1 m_2 - l_2 m_1)(x - x_1)(x - x_2) \end{cases}$$

Les points d'une droite décrivent les plans tangents d'un cylindre parabolique.

Ces formules montrent que lorsque le point x varie sur l'axe Ox, le plan qu'il décrit change, mais reste tangent à un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à l'axe OZ.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si trois points A, A′, A″ *d'une même droite décrivent trois plans formant un prisme, tout point* M *de la même droite décrit un plan parallèle aux arêtes de ce prisme. Lorsque le point* M *change sur la droite, le plan qu'il décrit change en enveloppant un cylindre parabolique qui est naturellement tangent aux trois faces du prisme.*

Il pourrait arriver que les trois plans Π, Π′, Π″ non seulement fussent parallèles à une même droite, mais fissent partie d'un même faisceau. Alors les principes les plus élémentaires de la théorie du rapport anharmonique rendent évident ce fait que tout point de la droite A A′ A″ décrit un plan de ce même faisceau.

Cas général où quatre points décrivent quatre plans formant un tétraèdre.

15. Examinons maintenant le cas où quatre points décrivent quatre plans formant un tétraèdre. Si l'on désigne génériquement par x_i, y_i, z_i les coordonnées de l'un des points et par l_i, m_i, n_i, p_i les coefficients de l'équation du plan qu'il décrit, on devra avoir quatre identités de la forme

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} P_i = l_i(a + \alpha x_i + \alpha' y_i + \alpha'' z_i) + m_i(b + \beta x_i + \beta' y_i + \beta'' z_i) \\ + n_i(c + \gamma x_i + \gamma' y_i + \gamma'' z_i) + p_i = 0 \\ (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right.$$

En éliminant a, b, c entre ces quatre équations, il restera une équation linéaire entre les neuf cosinus, c'est-à-dire une relation quadratique entre les paramètres λ, μ, ν, ρ d'Olinde Rodrigues.

Soit

$$(41)\qquad \Theta(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$$

cette relation quadratique.

Les équations (40) fourniront en même temps pour a, b, c des expressions linéaires en α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', c'est-à-dire des fonctions homogènes et du second degré en λ, μ, ν, ρ

Dès lors, les formules qui représentent le mouvement s'écriront

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \Phi_1, \\ Y &= \Phi_2, \\ Z &= \Phi_3, \\ T &= \Phi_4 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2, \end{aligned}\right.$$

où Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 sont des fonctions homogènes et du second degré

de λ, μ, ν, ρ. Seulement ces paramètres λ, μ, ν, ρ se trouvent liés par l'équation

$$\Theta(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0.$$

On doit observer que ce mouvement est unicursal. En effet, l'équation $\Theta = 0$ représente en coordonnées homogènes λ, μ, ν, ρ une quadrique pour laquelle les coordonnées d'un point courant sont exprimables sous forme de fonctions homogènes et du second degré de trois paramètres u, v, w. On reconnaîtra aisément que les courbes qui représentent sur le plan les sections planes de la surface, quand on emploie les paramètres u, v, w, sont des courbes du quatrième ordre ayant deux points doubles en commun et ne se coupent dès lors qu'en huit points variables.

Les surfaces décrites sont donc du huitième degré. Si l'on fait varier λ, μ, ν, ρ de manière à se déplacer sur une droite de la quadrique $\Theta = 0$, λ, μ, ν, ρ sont des fonctions linéaires d'un paramètre; les coordonnées absolues X, Y, Z, T du point décrivant sont des fonctions du second degré d'un paramètre et l'on voit ainsi qu'aux génératrices rectilignes de la quadrique $\Theta = 0$ il correspond deux familles de coniques tracées sur la surface du huitième ordre (1).

Cas de décomposition.

Tout ceci est dit dans le cas où la relation $\Theta = 0$ entre les cosinus ne se décompose pas. Si cela avait lieu, si Θ était égal au produit de deux fonctions linéaires en λ, μ, ν, ρ

$$\Theta = \Theta' . \Theta'_1,$$

il y aurait évidemment deux mouvements à surfaces de Steiner (n° 6) qui satisferaient aux conditions imposées. Dans chacun d'eux il y a six autres points (du moins en général) qui décrivent des plans.

Retour au cas général.

Il est intéressant de se rendre compte si quelque chose d'analogue peut se produire, même dans le cas où l'équation $\Theta = 0$ ne se décompose pas, et si, dans ce cas encore, le fait que quatre points décrivent des plans entraîne la même chose pour un cinquième.

Soient x, y, z les coordonnées de ce cinquième point et l, m, n, p les coefficients de l'équation du plan qu'il décrit.

L'équation de condition

$$(43)\quad \begin{cases} P = l(a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m(b + \beta x + \beta' y + \beta'' z) \\ \qquad + n(c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) + p = 0 \end{cases}$$

doit être une conséquence des quatre équations (40). Comme nous nous

(1) Voir ma note aux *Comptes rendus* en 1881. Plus récemment, M. Kœnigs a étudié ces surfaces dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*.

plaçons hors du cas de décomposition, on verra, comme au n° **14**, qu'il doit exister entre les P_i et P une identité de la forme

$$(44) \qquad P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3 + \theta_4 P_4.$$

Cette identité se décompose dans les relations

$$\begin{array}{llll} l = \Sigma\theta_i l_i, & m = \Sigma\theta_i m_i, & n = \Sigma\theta_i n_i, & p = \Sigma\theta_i p_i, \\ xl = \Sigma\theta_i x_i l_i, & xm = \Sigma\theta_i x_i m_i, & xn = \Sigma\theta_i x_i n_i, & \\ yl = \Sigma\theta_i y_i l_i, & ym = \Sigma\theta_i y_i m_i, & yn = \Sigma\theta_i y_i n_i, & \\ zl = \Sigma\theta_i z_i l_i, & zm = \Sigma\theta_i z_i m_i, & zn = \Sigma\theta_i z_i n_i. & \end{array}$$

Ces treize équations expriment que le système d'équations en u_1, u_2, u_3, u_4

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u, \\ x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = xu, \\ y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 + y_4 u_4 = yu, \\ z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 + z_4 u_4 = zu, \end{array} \right.$$

admet trois systèmes de solutions

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} (\theta_1 l_1, & \theta_2 l_2, & \theta_3 l_3, & \theta_4 l_4, & l), \\ (\theta_1 m_1, & \theta_2 m_2, & \theta_3 m_3, & \theta_4 m_4, & m), \\ (\theta_1 n_1, & \theta_2 n_2, & \theta_3 n_3, & \theta_4 n_4, & n). \end{array} \right.$$

Ces trois systèmes de solutions sont linéairement indépendants, sans quoi les cinq plans considérés sont parallèles à une même droite, cas que nous écartons tout d'abord. Il faudra donc que le système des équations (45) se réduise seulement à deux et que tous les déterminants à trois lignes et à trois colonnes tirés de la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1, \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x, \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y, \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z \end{array} \right\|$$

soient nuls. Cela équivaut à dire que les quatre points (x_i, y_i, z_i) et le point (x, y, z) sont sur une même droite.

Nous pourrons supposer que l'axe Ox est cette droite. Les y_i, z_i sont nuls ainsi que y et z, ce qui réduit aux deux premières le système des équations (45).

Alors, par un calcul entièrement analogue à celui du numéro précédent, et en désignant par Δ_1 le déterminant $\Sigma \pm l_2 m_3 n_4$ et par Δ_2, Δ_3, Δ_4 les quatre déterminants analogues, on trouve que le point M d'abcisse égale à x sur l'axe Ox décrit un plan qui a pour équa-

tion

$$(47) \qquad \sum_i (l_i X + m_i Y + n_i Z + p_i) \frac{\Delta_i}{x - x_i} = 0.$$

Quand le point M varie sur l'axe Ox, le plan qu'il décrit change en restant tangent à une développable parabolique de la troisième classe, ainsi que le prouve l'équation (47) qui donne la représentation de ce plan en fonction du paramètre variable x.

Ainsi, *si quatre points* A, A′, A″, A‴ *en ligne droite, décrivent quatre plans* Π, Π′, Π″, Π‴ *formant un tétraèdre, tout autre point* M *de cette droite décrit un cinquième plan. Si le point* M *vient à changer sur la droite, le plan qu'il décrit change, mais en restant tangent à une surface développable de la troisième classe, parabolique.*

Mais il faut bien se rendre compte que, dans ce mouvement, les points A, A′, A″, A‴, ..., M ne décrivent plus la totalité des plans Π, Π′, ..., *ils décrivent des coniques dans ces plans.*

La chose est bien différente, comme on voit, de celle qui se présente dans le mouvement à surface de Steiner où la totalité du plan (aux imaginaires près) se trouve décrite.

La démonstration directe de cette proposition peut être simplifiée par la remarque suivante. On a vu au n° 98, page 297, que si trois points en ligne droite A, A′, A″ décrivent les faces d'un trièdre, tout autre point M de la droite décrit un ellipsoïde. Si donc le point M se trouve, par surcroît, devoir rester dans un plan, il décrit forcément l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde et du plan.

On observera que tous nos raisonnements supposent simplement que l'élimination de a, b, c entre les équations (40) n'a donné qu'une seule équation $\Theta = 0$ entre les cosinus. Or, cette supposition subsistera tant que l'un des déterminants à 9 termes tirés du tableau

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{matrix} \right\|$$

sera différent de zéro, c'est-à-dire tant que trois au moins des quatre plans Π, Π′, Π″, Π‴ formeront un vrai trièdre.

Cas où les quatre plans Π, Π′, Π″, Π‴ forment un prisme.

16. Il nous reste donc à examiner le cas où les quatre plans Π, Π′, Π″, Π‴ forment un prisme.

On pourra alors supposer que ces plans sont tous parallèles à OZ, ce qui donnera

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0.$$

Les équations (40) s'écrivent

$$(48)\quad \begin{cases} P_i = l_i(a + \alpha x_i + \alpha' y_i + \alpha'' z_i) + m_i(b + \beta x_i + \beta' y_i + \beta'' z_i) \\ \qquad\qquad + p_i = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

l'équation (43) qui exprime que le point x, y, z décrit le plan (l, m, n, p) devant être une conséquence des équations (48), on voit que la variable c ne doit pas y figurer; n est donc nul et le plan décrit par le point (x, y, z) est lui aussi parallèle à OZ. L'équation (43) s'écrit alors

$$(49)\quad P = l(a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) + m(b + \beta x + \beta' y + \beta'' z) + p = 0.$$

En éliminant a, b entre les équations (48), on obtiendra deux équations linéaires entre les cosinus

$$(50)\qquad \Theta = 0, \quad H = 0;$$

en portant alors les valeurs de a, b, tirées de deux des équations (48), dans l'équation (49) on obtiendra une relation linéaire entre les cosinus, que je représente par

$$(49)'\qquad \Psi = 0.$$

Si l'on fait encore abstraction du cas où il y aurait décomposition, cas qui donnerait encore une relation linéaire entre λ, μ, ν, ρ et conduirait à un mouvement à surfaces de Steiner, il faudra que Ψ soit une combinaison linéaire de Θ et de H, en sorte qu'en définitive il existera encore une relation identique de la forme

$$(51)\qquad P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3 + \theta_4 P_4,$$

comme précédemment, équation (44).

L'équation (51) se décompose encore dans les suivantes :

$$\begin{aligned} l &= \Sigma\theta_i l_i, & m &= \Sigma\theta_i m_i, & p &= \Sigma\theta_i p_i, \\ xl &= \Sigma\theta_i x_i l_i, & xm &= \Sigma\theta_i x_i m_i, \\ yl &= \Sigma\theta_i y_i l_i, & ym &= \Sigma\theta_i y_i m_i, \\ zl &= \Sigma\theta_i z_i l_i, & zm &= \Sigma\theta_i z_i m_i. \end{aligned}$$

Ces relations expriment que le système d'équations déjà formé (45) admet les deux systèmes de solutions indépendantes

$$(52)\qquad \begin{cases} (\theta_1 l_1, & \theta_2 l_2 & \theta_3 l_3, & \theta_4 l_4, & \theta l), \\ (\theta_1 m_1, & \theta_2 m_2, & \theta_3 m_3, & \theta_4 m_4, & \theta m). \end{cases}$$

Il faudra donc que tous les déterminants à quatre lignes et à

quatre colonnes tirés du tableau déjà considéré

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z \end{matrix}\right\|$$

soient nuls.

Cela revient à dire que les points A, A', A'', A''' sont dans un même plan.

On peut alors supposer que ce plan soit justement le plan xOy; on aura alors $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z = 0$, et les relations précédentes se réduisent à

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} l &= \Sigma\theta_i l_i, & m &= \Sigma\theta_i m_i, & p &= \Sigma\theta_i p_i, \\ xl &= \Sigma\theta_i x_i l_i, & xm &= \Sigma\theta_i x_i m_i, \\ yl &= \Sigma\theta_i y_i l_i, & ym &= \Sigma\theta_i y_i m_i. \end{aligned}\right.$$

On peut remplacer ces équations par les suivantes :

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\theta_i (x - x_i)\, l_i = 0, & &\Sigma\theta_i (x - x_i)\, m_i = 0, \\ &\Sigma\theta_i (y - y_i)\, l_i = 0, & &\Sigma\theta_i (y - y_i)\, m_i = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(55)\quad l = \Sigma\theta_i l_i, \quad m = \Sigma\theta_i m_i, \quad p = \Sigma\theta_i p_i.$$

Les quatre premières équations sont surabondantes pour déterminer les valeurs des θ_i; en exprimant leur compatibilité, on trouve qu'il faut avoir

$$(56)\quad \begin{vmatrix} l_1(x - x_1) & l_2(x - x_2) & l_3(x - x_3) & l_4(x - x_4) \\ m_1(x - x_1) & m_2(x - x_2) & m_3(x - x_3) & m_4(x - x_4) \\ l_1(y - y_1) & l_2(y - y_2) & l_3(y - y_3) & l_4(y - y_4) \\ m_1(y - y_1) & m_2(y - y_2) & m_3(y - y_3) & m_4(y - y_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré en x, y, elle représente une conique C sur laquelle doit se trouver le point M. Les équations (54) donnent alors les valeurs des θ_i en fonction des coordonnées x, y du point M et en portant ces valeurs dans les équations (55) on aura les expressions l, m, p des coefficients du plan décrit par M.

On peut se rendre compte que ce plan enveloppe lui-même un cylindre parabolique de la troisième classe.

Si, en effet, on élimine x, y entre les équations (53) on trouve les cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned} &l = \Sigma\theta_i l_i, \quad m = \Sigma\theta_i m_i, \quad p = \Sigma\theta_i p_i, \\ &0 = \Sigma\theta_i x_i (m_i l - l_i m), \\ &0 = \Sigma\theta_i y_i (m_i l - l_i m), \end{aligned}$$

d'où, en éliminant les θ,

$$(57)\quad \begin{vmatrix} x_1(m_1 l - l_1 m) & y_1(m_1 l - l_1 m) & l_1 & m_1 & p_1 \\ x_2(m_2 l - l_2 m) & y_2(m_2 l - l_2 m) & l_2 & m_2 & p_2 \\ x_3(m_3 l - l_3 m) & y_3(m_3 l - l_3 m) & l_3 & m_3 & p_3 \\ x_4(m_4 l - l_4 m) & y_4(m_4 l - l_4 m) & l_4 & m_4 & p_4 \\ 0 & 0 & l & m & p \end{vmatrix} = 0,$$

équation du troisième ordre en l, m, p qui est vérifiée par $l = 0$, $m = 0$.

Ainsi, *lorsque quatre points* A, A′, A″, A‴ *pris dans un même plan décrivent quatre plans* Π, Π′, Π″, Π‴ *parallèles à une même droite et formant un prisme, tous les points d'une certaine conique* C *passant par les points* A, A′, A″, A‴ *possèdent la même propriété. Tous les plans décrits par les divers points de cette conique enveloppent un cylindre parabolique de la troisième classe.*

A l'encontre de ce qui a lieu au nº 16, chaque point de la conique C décrit la totalité du plan.

Cas où un même plan est décrit par plusieurs points.

17. Les raisonnements qui précèdent supposent essentiellement qu'un même plan ne se trouve pas décrit par plusieurs points de la figure.

Si cela a lieu pour trois points non en ligne droite, on est dans le cas où un plan de la figure glisse sur lui-même.

Si cela a lieu pour deux points d'une droite, il en est de même pour tous les points de la droite.

Supposons qu'une droite D de la figure balaie un plan Π et qu'en outre un point A_1 décrive un plan Π_1 non parallèle au premier. Il n'arrivera jamais qu'un second point M, pris en dehors de la droite D, décrive aussi un plan comme conséquence des conditions précédentes.

Cas où une droite balaie un plan et où tous les points d'une autre décrivent des plans.

Si le plan Π_1 est parallèle au plan Π, un plan de la figure glisse sur le plan Π.

Supposons maintenant qu'une droite D balaie encore un plan Π et que deux autres points A_1, A_2 décrivent des plans Π_1, Π_2 formant un prisme avec le plan Π. Si la droite A_1A_2 coupe la droite D, tout point de la droite A_1A_2 décrit un plan, et l'ensemble de ces plans enveloppe un cylindre parabolique du second degré.

Cas où deux droites balaient des plans.

Il y a enfin un cas où deux droites D, D′ du corps balaient deux plans Π, Π′, non parallèles. (Si Π, Π′ étaient parallèles, un plan de la figure mobile glisserait sur chacun d'eux).

Prenons pour axe Oz la perpendiculaire commune aux droites D, D' et en choisissant convenablement les deux autres axes Ox, Oy, amenons D, D' à être représentées par des équations de la forme

$$(58) \qquad \begin{cases} z = h, & z = -h, \\ y = -qx, & y = qx. \end{cases}$$

Prenons pour ZOX, ZOY les plans bissecteurs des plans Π, Π'. Ces plans auront pour équation respectivement

$$(59) \qquad X + kY = 0, \qquad X - kY = 0.$$

Si on exprime que la droite D décrit le plan Π et la droite D' le plan Π', on est conduit très aisément aux équations qui définissent ce mouvement,

$$\begin{aligned} a + hk\beta' &= 0, & kb + h\alpha' &= 0, \\ \alpha - kq\beta' &= 0, & q\alpha' - k\beta &= 0. \end{aligned}$$

En dehors des cas où les relations entre les cosinus se décomposent, il n'y a pas de points autres que ceux des droites D, D' qui décrivent des plans.

Nous nous arrêterons à ces indications qui montrent combien il y aurait intérêt à étudier à fond les mouvements algébriques et quelles ressources offrent pour cette étude les paramètres d'Euler et d'Olinde Rodrigues.

NOTE

SUR LA

CINÉMATIQUE D'UN MILIEU CONTINU

PAR

MM. EUGÈNE ET FRANÇOIS COSSERAT

I. — Quelques généralités sur les coordonnées curvilignes.

1. — *Rappel des formules fondamentales relatives au trièdre mobile.*

Considérons un système de coordonnées curvilignes quelconque pour lequel nous conserverons les notations adoptées pages 59 et suivantes, sauf en ce qui concerne les paramètres q_1, q_2, q_3, que nous désignerons respectivement par ρ_1, ρ_2, ρ_3. Nous pouvons lier l'étude de ce système à celle du mouvement d'un trièdre mobile en opérant de la manière suivante. M désignant un point de l'espace dont les coordonnées, par rapport à des axes fixes rectangulaires, sont X_0, Y_0, Z_0, et dont les coordonnées curvilignes sont ρ_1, ρ_2, ρ_3, nous construirons un trièdre trirectangle (T) dont le sommet soit en M et dont les axes Mx', My', Mz' soient définis par le tableau de Lamé :

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

où les cosinus a, b, c, ... sont des fonctions connues de ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Désignons par ξ_i, η_i, ζ_i les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_i varie seul et joue le rôle du temps; soient également p_i, q_i, r_i les quantités qui définis-

sent, par rapport aux mêmes axes, la rotation du trièdre relative au paramètre ρ_i. Rappelons les formules des pages 225 et suivantes ; on a d'abord :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_0}{\partial \rho_i} = a\xi_i + b\eta_i + c\zeta_i, \qquad \frac{\partial Y_0}{\partial \rho_i} = a'\xi_i + b'\eta_i + c'\zeta_i, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial Z_0}{\partial \rho_i} = a''\xi_i + b''\eta_i + c''\zeta_i; \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} p_i &= \sum c\frac{\partial b}{\partial \rho_i} = -\sum b\frac{\partial c}{\partial \rho_i}, \\ q_i &= \sum a\frac{\partial c}{\partial \rho_i} = -\sum c\frac{\partial a}{\partial \rho_i}, \\ r_i &= \sum b\frac{\partial a}{\partial \rho_i} = -\sum a\frac{\partial b}{\partial \rho_i}. \end{aligned} \right.$$

Les projections sur les axes mobiles de l'élément d'arc de la courbe décrite par un point de coordonnées x, y, z, relativement au trièdre (T), sont :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &dx + \sum(\xi_i + q_i z - r_i y)\, d\rho_i, \\ &dy + \sum(\eta_i + r_i x - p_i z)\, d\rho_i, \\ &dz + \sum(\zeta_i + p_i y - q_i x)\, d\rho_i. \end{aligned} \right.$$

Rappelons également les formules de la page 230 :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial \rho_i} + q_j\zeta_i - q_i\zeta_j + r_i\eta_j - r_j\eta_i = 0, \\ &\frac{\partial \eta_i}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial \rho_i} + r_j\xi_i - r_i\xi_j + p_i\zeta_j - p_j\zeta_i = 0, \\ &\frac{\partial \zeta_i}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial \rho_i} + p_j\eta_i - p_i\eta_j + q_i\xi_j - q_j\xi_i = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial p_j}{\partial \rho_i} - \frac{\partial p_i}{\partial \rho_j} + q_i r_j - q_j r_i = 0, \\ &\frac{\partial q_j}{\partial \rho_i} - \frac{\partial q_i}{\partial \rho_j} + r_i p_j - r_j p_i = 0, \\ &\frac{\partial r_j}{\partial \rho_i} - \frac{\partial r_i}{\partial \rho_j} + p_i q_j - p_j q_i = 0. \end{aligned} \right.$$

2. — *Détermination d'un système de coordonnées curvilignes au moyen de son ds^2.*

Soit, comme à la page 60,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2 + A_3 d\rho_3^2 + 2B_1 d\rho_2 d\rho_3 \\ + 2B_2 d\rho_3 d\rho_1 + 2B_3 d\rho_1 d\rho_2 \end{aligned} \right.$$

l'expression du carré de l'élément linéaire de l'espace rapporté au système de coordonnées curvilignes (ρ_1, ρ_2, ρ_3); les formules (3), appliquées à l'origine du trièdre mobile, nous donnent

$$(7)\qquad A_i = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \qquad B_i = \xi_j \xi_k + \eta_j \eta_k + \zeta_j \zeta_k,$$

i, j, k désignant une permutation des nombres 1, 2, 3.

Pour rendre plus explicites les considérations que nous allons développer, faisons, à l'égard du trièdre (T), l'hypothèse suivante, que l'on pourrait remplacer par une autre présentant plus de symétrie, mais qui offre des avantages évidents. L'axe des z' de (T) sera normal à la surface (ρ_3), que l'on obtient en laissant ρ_3 invariable; son axe des x' sera tangent à la courbe C_1 de la page 59; nous supposerons de plus qu'on précise les directions des trois axes de (T) en les rapportant aux trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ de la page 59.

L'hypothèse que nous venons de faire entraîne, eu égard aux formules (3), les relations suivantes :

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \eta_1 = 0,$$

qui, jointes aux formules (7), conduisent au système :

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \xi_1^2 = A_1, & \eta_1 = 0, & \zeta_1 = 0, \\ \xi_2 = \dfrac{B_3}{\xi_1}, & \eta_2^2 = \dfrac{A_1 A_2 - B_3^2}{A_1}, & \zeta_2 = 0, \\ \xi_3 = \dfrac{B_2}{\xi_1}, & \eta_3 = \dfrac{A_1 B_1 - B_2 B_3}{A_1 \eta_2}, & \zeta_3^2 = \dfrac{J^2}{A_1 A_2 - B_3^2}, \end{array} \right.$$

où J^2 désigne le discriminant de la forme quadratique (6); ce système détermine sans ambiguïté les translations ξ_i, η_i, ζ_i, si l'on a égard à l'hypothèse par laquelle nous avons fixé les directions des axes de (T).

Les neuf formules (4) définissent ensuite les rotations p_i, q_i, r_i; si l'on porte les valeurs de ces rotations dans les formules (5), on obtient entre les A_i, B_i des équations aux dérivées partielles du

second ordre qui, dans le cas des systèmes triples orthogonaux, deviennent les équations bien connues de Lamé.

Les équations que nous venons d'obtenir sont, par ce qui précède, des conditions nécessaires pour que la forme quadratique

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2 + A_3 d\rho_3^2 + 2B_1 d\rho_2 d\rho_3 + 2B_2 d\rho_3 d\rho_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2B_3 d\rho_1 d\rho_2 \end{cases}$$

puisse représenter un ds^2 de l'espace.

Démontrons qu'elles sont suffisantes et que, *si les fonctions* A_i, B_i *les vérifient, il existe des systèmes triples correspondants qui se déduisent de l'un d'eux par un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie.*

Remarquons, en effet, tout d'abord, que si l'on répète le calcul indiqué plus haut pour la formation de ces équations de condition, non plus avec les valeurs particulières adoptées pour les ξ_i, η_i, ζ_i, mais avec l'un quelconque des systèmes de valeurs que l'on peut déduire de (8), les équations résultant, sans aucune transformation ultérieure, de la substitution des p_i, q_i, r_i dans (5), sont identiques à celles obtenues dans le premier cas.

Cette remarque faite, considérons *un quelconque* des systèmes triples dont nous supposons l'existence et associons-lui le trièdre (T) défini comme plus haut; les équations (8) détermineront les translations ξ_i, η_i, ζ_i sans ambiguïté; les formules (4) donneront les rotations et les formules (5) seront alors vérifiées par hypothèse.

Donc, conformément au résultat que l'on doit surtout attribuer à Bonnet et à M. Darboux, et qui est rappelé à la fin de la page 228, nous aurons, *pour chaque disposition du trièdre* (T), un mouvement de ce trièdre et un seul, c'est-à-dire un système de coordonnées curvilignes et un seul. Aux deux dispositions du trièdre (T) correspondent deux systèmes triples qui, à un déplacement d'ensemble près, se déduisent l'un de l'autre, d'après les formules (1), au moyen d'une transformation par symétrie.

II. — De la déformation d'un milieu continu en général.

3. — *Introduction des six fonctions habituellement associées à une déformation.*

Définissons une déformation d'un milieu continu quelconque occupant une portion de l'espace de la manière suivante : nous

concevons que chaque point de ce milieu éprouve un déplacement variant d'une façon continue avec la position du point et nous supposons que le milieu déformé ne puisse pas s'obtenir en imprimant au milieu primitif un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie; si cette dernière circonstance se présente, nous dirons, pour comprendre tous les cas dans la même définition, que la déformation est *nulle*.

Rapportons le milieu avant et après déformation à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées primitives d'un point et $x + \mathbf{u}$, $y + \mathbf{v}$, $z + \mathbf{w}$ ce qu'elles deviennent après le déplacement de ce point. Supposons que les fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ de x, y, z soient définies et admettent des dérivées premières continues pour toutes les valeurs des variables correspondant à des points du milieu. Un système quelconque de telles fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ détermine *une seule déformation*; mais inversement, à une déformation ne correspond pas *un seul système de fonctions* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, si l'on a égard au déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, que l'on peut toujours imposer à un milieu sans le déformer.

Proposons-nous de définir l'état de déformation du milieu au moyen d'autres fonctions, qui seront déterminées d'une façon unique par la déformation et qui la définiront sans ambiguïté.

Les formules

$$(10) \qquad x_1 = x + \mathbf{u}, \qquad y_1 = y + \mathbf{v}, \qquad z_1 = z + \mathbf{w}$$

peuvent être considérées comme définissant une correspondance entre deux espaces, l'un lieu du point (x, y, z), l'autre lieu du point (x_1, y_1, z_1). Mais on peut aussi les envisager comme des formules rapportant l'espace, lieu du point (x_1, y_1, z_1), à un système de coordonnées curvilignes (x, y, z).

D'après le numéro 2, nous avons des fonctions satisfaisant à la question, soit en prenant les six coefficients de la forme différentielle quadratique qui représente le carré de l'élément linéaire du second espace rapporté au système de coordonnées (x, y, z), soit en prenant des fonctions convenables de ces six coefficients. Or, si

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = {} & \mathrm{A}_1 dx^2 + \mathrm{A}_2 dy^2 + \mathrm{A}_3 dz^2 \\ & + 2\mathrm{B}_1 dy\,dz + 2\mathrm{B}_2 dz\,dx + 2\mathrm{B}_3 dx\,dy \end{aligned} \right.$$

est le carré de l'élément linéaire du second espace, cette expression devient identique au carré de l'élément linéaire du premier espace, lorsque les fonctions A_i se réduisent à l'unité et que les fonctions B_i

s'annulent. Nous sommes donc amenés à adopter, pour définir la déformation, les six fonctions ε_i, γ_i obtenues en posant :

$$\varepsilon_i = \frac{A_i - 1}{2}, \quad \gamma_i = B_i,$$

et dont les expressions, au moyen de x, y, z, se calculent, lorsque $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont données, par des formules telles que les suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right)^2\right], \\ \gamma_1 &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit immédiatement des relations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz, \\ dy_1 &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz, \\ dz_1 &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right) dz, \end{aligned} \right.$$

résultant de la différentiation des équations (10).

4. — *Propositions relatives aux fonctions associées à une déformation.*

La façon dont nous venons de rattacher les six fonctions ε_i, γ_i à la théorie des coordonnées curvilignes nous conduit immédiatement, d'après le n° 2, à la proposition suivante :

A toute déformation correspondent six fonctions ε_i, γ_i *définies par les formules* (12) *et leurs analogues; inversement, au système de six fonctions ainsi construites correspond une déformation et une seule* ([1]), *celle qui leur a donné naissance.*

Les six fonctions déterminées par les formules (12) *et leurs analogues ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles vérifient, en effet, un système d'équations aux dérivées partielles*

([1]) En considérant comme équivalentes deux déformations qui ne diffèrent que par un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie.

du second ordre; à toute solution de ce système correspond une déformation et une seule.

Le cas où la déformation est nulle présente un intérêt particulier; nous avons à son égard la proposition suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation soit nulle, c'est-à-dire pour que la seconde position du milieu se déduise de la première au moyen d'un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, s'obtiennent en annulant les six fonctions ε_i, γ_i.

5. — *Déformation homogène; ses six composantes.*

Une déformation quelconque étant définie par les six fonctions ε_i, γ_i, la déformation la plus simple est celle pour laquelle ces six fonctions sont des constantes non toutes nulles; on l'appelle *déformation homogène;* les valeurs constantes des six fonctions ε_i, γ_i se nomment ses *composantes.*

Les six fonctions A_i, B_i qui figurent dans la formule (11) étant des constantes, il en résulte que x_1, y_1, z_1 sont des fonctions entières et linéaires de x, y, z. La déformation homogène est donc définie par les formules

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_{10} + (1 + a_{11})\,x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_1 &= a_{20} + a_{21}x + (1 + a_{22})\,y + a_{23}z, \\ z_1 &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})\,z, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients a_{ij} désignent des constantes telles que les valeurs constantes des fonctions ε_i, γ_i ne soient pas toutes nulles, et dont les seconds membres sont des fonctions linéaires indépendantes.

Posons

$$H_i = \sqrt{A_i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i}$$

et définissons trois angles α_1, α_2, α_3, compris entre 0 et π, par la formule

$$(15) \qquad \cos \alpha_i = \frac{B_i}{\sqrt{A_j}\sqrt{A_k}} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_j}\,\sqrt{1 + 2\varepsilon_k}},$$

où i, j, k désigne une permutation des nombres 1, 2, 3.

$H_1\,dx = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}\,dx$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $y =$ const., $z =$ const.; de même, $H_2\,dy = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}\,dy$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection

des surfaces $z = \text{const.}$, $y = \text{const.}$; $H_3 dz = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}\, dz$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ De plus, α_1 est l'angle sous lequel se coupent les arcs élémentaires $H_2 dy$ et $H_3 dz$; α_2 est l'angle des arcs élémentaires $H_3 dz$ et $H_1 dx$; α_3 est l'angle des arcs élémentaires $H_1 dx$ et $H_2 dy$.

L'arc élémentaire $H_1 dx$ du second espace correspond à l'arc élémentaire dx du premier; par conséquent, dans le cas de la déformation homogène où les H_i, α_i sont des constantes, un segment de droite parallèle à Ox subissant un allongement qui ne dépend que de sa longueur, et non de son origine, nous pouvons parler de l'accroissement de l'unité de longueur prise parallèlement à Ox, c'est-à-dire de la *dilatation linéaire suivant la direction* Ox; elle a pour valeur :

$$H_1 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1.$$

Les *dilatations linéaires suivant les directions* Oy *et* Oz sont de même :

$$H_2 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1,$$
$$H_3 - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1.$$

Pareillement, un angle droit dont les côtés sont parallèles à Oy, Oz devient α_1, et cela, *quel que soit son sommet;* un angle droit dont les côtés sont parallèles à Oz, Ox devient α_2, et un angle droit dont les côtés sont parallèles à Ox, Oy devient α_3. Nous pouvons donc aussi introduire la notion des *dilatations angulaires* $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$ (1).

6. — *Déformation en un point d'un milieu; ses six composantes.*

Envisageons une portion du milieu non déformé entourant un point $P(x, y, z)$. Si cette portion est suffisamment petite, les six fonctions ε_i, γ_i, qui sont des fonctions continues de x, y, z, conserveront, en ses différents points, sensiblement les mêmes valeurs, celles qu'elles ont au point $P(x, y, z)$. On est ainsi amené à substituer à la déformation d'une portion du milieu entourant un point $P(x, y, z)$, lorsque cette portion est suffisamment petite, une déformation homogène dont les six composantes sont les valeurs que

(1) Conformément à l'usage habituel, nous adoptons ces expressions et non leurs valeurs changées de signe.

prennent au point (x, y, z) les six fonctions associées à la déformation du milieu considéré.

C'est ce que l'on peut encore exprimer de la façon suivante. Si nous considérons un point Q $(x + dx, y + dy, z + dz)$ du milieu non déformé, il est clair que les nouvelles coordonnées de ce point ne différeront de

$$x_1 + dx_1, \quad y_1 + dy_1, \quad z_1 + dz_1,$$

que de quantités qui seront infiniment petites du second ordre, lorsque dx, dy, dz seront tous trois infiniment petits du premier ordre. Ceci revient à dire que, dans le voisinage de P, la déformation est sensiblement définie par les équations

$$(16) \qquad \begin{cases} X_1 = a_{10} + (1 + a_{11}) X + a_{12} Y + a_{13} Z, \\ Y_1 = a_{20} + a_{21} X + (1 + a_{22}) Y + a_{23} Z, \\ Z_1 = a_{30} + a_{31} X + a_{32} Y + (1 + a_{33}) Z, \end{cases}$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées d'un point Q du milieu non déformé par rapport au point P, c'est-à-dire par rapport à trois axes ayant leur origine en P et parallèles aux axes coordonnés, où X_1, Y_1, Z_1 désignent les coordonnées de la nouvelle position de Q par rapport aux mêmes axes, et où enfin les coefficients a_{ij}, qui sont déterminés en même temps que x, y, z, sont donnés par les formules

$$(17) \qquad \begin{cases} a_{10} = \mathbf{u}, & a_{11} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, & a_{12} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, & a_{13} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \\ a_{20} = \mathbf{v}, & a_{21} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, & a_{22} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, & a_{23} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \\ a_{30} = \mathbf{w}, & a_{31} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, & a_{32} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}, & a_{33} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ainsi, *la déformation subie par la portion du milieu avoisinant un point* P (x, y, z) *de ce milieu est sensiblement une déformation homogène définie par les formules* (16) *et* (17), *et ayant pour composantes les valeurs que prennent au point* P *les six fonctions* ε_i, γ_i *qui définissent la déformation du milieu considéré.*

Nous désignerons la déformation homogène définie par les formules (16), (17), sous le nom de *déformation au point* P; les valeurs des fonctions ε_i, γ_i au point P seront dites les *composantes de la déformation au point* P.

Les résultats acquis au n° 5 nous montrent que nous aurons *au point* P (x, y, z) trois dilatations linéaires *suivant* Ox, Oy, Oz, ayant pour valeurs

$$\sqrt{1+2\varepsilon_1}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_2}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_3}-1.$$

Un trièdre trirectangle de sommet P et d'arêtes parallèles aux axes deviendra un trièdre dont les angles α_1, α_2, α_3 seront définis par les formules (15).

Aux remarques précédentes s'ajoutent les suivantes, qui introduisent une notion nouvelle, celle de la *rotation en un point* du milieu.

7. — *Les deux ellipsoïdes de déformation et la rotation en un point du milieu. Déformation pure.*

Les formules (16) montrent immédiatement qu'il existe, en général, un trièdre de sommet P, que la déformation au point P transforme dans un trièdre dont les arêtes sont respectivement parallèles à celles du premier.

A un ellipsoïde placé dans l'un des deux espaces, les formules (16) font correspondre un nouvel ellipsoïde, et à trois diamètres conjugués de l'un des ellipsoïdes correspondent trois diamètres conjugués de l'autre. En particulier, à la sphère du premier espace, qui est définie par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

les formules (16) font correspondre un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ que nous appellerons le *premier ellipsoïde de déformation relatif au point* P. Cet ellipsoïde étant supposé à axes inégaux, il existe un système et un seul de trois diamètres rectangulaires de la sphère considérée qui se transforment par (16) en trois droites rectangulaires : ce sont les diamètres qui se transforment dans les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. De même, à la sphère du second espace, qui est définie par l'équation

$$(X_1 - a_{10})^2 + (Y_1 - a_{20})^2 + (Z_1 - a_{30})^2 = 1$$

correspond l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ défini par l'équation

$$(1+2\varepsilon_1)X^2 + (1+2\varepsilon_2)Y^2 + (1+2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1$$

et que nous appellerons le *second ellipsoïde de déformation relatif au point* P. Ses axes correspondent à trois diamètres rectangulaires de la sphère correspondante.

Ainsi, *en général, il existe un trièdre trirectangle et un seul, celui formé des axes du second ellipsoïde de déformation, qui se transforme en un nouveau trièdre trirectangle, savoir celui formé des axes du premier ellipsoïde de déformation.*

On peut, de plusieurs façons, par une rotation, suivie de la translation (a_{10}, a_{20}, a_{30}), appliquer les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur les axes correspondants de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. Parmi ces rotations, nous distinguerons celle pour laquelle les trois arêtes d'un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}$ s'appliquent finalement sur les trois arêtes *qui leur correspondent par* (16) et qui déterminent un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}_1$. Cette rotation sera ce que nous appellerons *la rotation au point* P *du milieu.*

Pour que cette dernière soit nulle, il faut mais il ne suffit pas que les directions des axes du second ellipsoïde de déformation soient aussi celles que (16) laisse invariables, ce qui s'exprime par

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

La déformation homogène correspondant à ces trois relations s'appelle une *déformation pure.*

8. — *Décomposition de la déformation en un point du milieu en une rotation suivie d'une déformation pure. Détermination de la rotation en un point du milieu.*

Étant donnée une déformation homogène définie par les formules (14) ou (16), où entrent douze constantes, on peut se proposer de la remplacer par une autre déformation homogène *équivalente,* définie par des équations où entrent des constantes en nombre moindre et, en particulier, en nombre égal à six.

Parmi les solutions en nombre infini de ce problème, on peut en distinguer de particulièrement intéressantes.

La déformation déterminée par les équations (16) peut être remplacée par une rotation définie par les formules

$$(18) \qquad \begin{cases} X' = aX + bY + cZ, \\ Y' = a'X + b'Y + c'Z, \\ Z' = a''X + b''Y + c''Z, \end{cases}$$

où a, b, c, ... désignent les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$, *suivie* de la déformation homogène

déterminée par les relations

$$(19)\quad \begin{cases} X_1 = a_{10} + (1 + a'_{11})\, X' + a'_{12} Y' + a'_{13} Z', \\ Y_1 = a_{20} + a'_{21} X' + (1 + a'_{22})\, Y' + a'_{23} Z', \\ Z_1 = a_{30} + a'_{31} X' + a'_{32} Y' + (1 + a'_{33})\, Z' \end{cases}$$

en posant

$$(20)\quad \begin{cases} 1 + a'_{11} = a\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) + b\,\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \\ a'_{21} = a\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + b\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) + c\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \\ a'_{31} = a\,\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + b\,\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + c\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right) \end{cases}$$

et six équations analogues.

A trois droites rectangulaires quelconques dans l'espace lieu de (X, Y, Z) correspondent trois droites rectangulaires dans l'espace lieu de (X', Y', Z'); par conséquent, si l'on veut que la déformation (19) soit une déformation pure, il faut et il suffit que la rotation (18) soit précisément une des rotations dont nous avons parlé au numéro précédent et qui amènent les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur ceux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$.

La déformation au point P *revient donc, et de plusieurs façons, à une rotation suivie d'une déformation pure.* Dans l'*une* de ces décompositions, la rotation n'est autre que la rotation au point P, qui est ainsi définie par les formules (9), où *a*, *b*, *c*, ... forment *une* solution du problème consistant à déterminer neuf cosinus qui vérifient, outre les relations

$$(21)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''a + b''b + c''c = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1,$$

les suivantes :

$$a'_{23} = a'_{32}, \quad a'_{31} = a'_{13}, \quad a'_{12} = a'_{21},$$

qui s'écrivent

$$(22)\quad \begin{cases} a''\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + b''\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) + c''\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = a'\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + b'\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + c'\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right), \\ a\,\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + b\,\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + c\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right) = a''\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) + b''\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c''\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \\ a'\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) + b'\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c'\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = a\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + b\left(1 + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) + c\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \end{cases}$$

9. — *Dilatation cubique en un point. Équation de continuité.*

Désignons par Δ le déterminant

$$\Delta = \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

dont le carré, formé par la règle de multiplication des déterminants, s'exprime, en fonction des composantes de la déformation au point P, au moyen de la formule

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

L'élément de volume $dx\, dy\, dz$, tracé autour de P (x, y, z), devient après déformation

$$(|\Delta| + \eta)\, dx\, dy\, dz,$$

η tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément, en sorte que

$$\theta = |\Delta| - 1$$

est la *dilatation cubique au point* P.

Il en résulte également que, pour un milieu dont la densité est ρ avant déformation au point (x, y, z), et ρ_1 après déformation au point (x_1, y_1, z_1), on a la relation

$$\rho = \rho_1 \times |\Delta|,$$

qui est une des formes de l'*équation de continuité* considérée en Hydrodynamique.

10. — *Transformation des composantes de la déformation en un point. Invariants de la déformation. Cas particuliers de déformation en un point : extension simple et glissement simple.*

La définition adoptée pour les composantes de la déformation en un point du milieu dépend des axes coordonnés. Si l'on considère de nouveaux axes, on aura six nouvelles composantes, qu'il est facile

d'exprimer au moyen des anciennes. Supposons que les directions des nouveaux axes soient définies par le tableau du n° 1 et soient x', y', z'; x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées, par rapport à ces nouveaux axes, des points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1). On a

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = (1+2\varepsilon_1)dx^2 + (1+2\varepsilon_2)dy^2 + (1+2\varepsilon_3)\,dz^2 + 2\gamma_1 dy\,dz + 2\gamma_2 dz\,dx + 2\gamma_3 dx\,dy$$

et

$$dx = a\,dx' + b\,dy' + c\,dz',$$
$$dy = a'dx' + b'dy' + c'dz',$$
$$dz = a''dx' + b''dy' + c''dz'.$$

On a donc

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = (1+2\varepsilon_1')\,dx'^2 + (1+2\varepsilon_2')\,dy'^2 + (1+2\varepsilon_3')\,dz'^2 + 2\gamma_1'\,dy'dz' + 2\gamma_2'\,dz'dx' + 2\gamma_3'\,dx'dy',$$

en posant

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 a'^2 + \varepsilon_3 a''^2 + \gamma_1 a'a'' + \gamma_2 a''a + \gamma_3 a a',$$
$$\gamma_1' = 2\varepsilon_1 bc + 2\varepsilon_2 b'c' + 2\varepsilon_3 b''c'' + \gamma_1 (b'c'' + b''c') + \gamma_2 (b''c + bc'') + \gamma_3 (bc' + b'c)$$

et quatre formules analogues.

Il résulte de ce qui précède que les expressions

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$$
$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2$$

restent inaltérées par une transformation de coordonnées.

Parmi les déformations homogènes, deux sont particulièrement intéressantes.

Dans la première, appelée *extension simple,* les lignes parallèles à une direction donnée sont dilatées et toutes les lignes perpendiculaires restent invariables en longueur. D'après ce qui précède, les conditions pour que la déformation en un point soit une extension simple sont :

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 0,$$
$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$

et la grandeur de cette extension simple est

$$e = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)} - 1.$$

Dans la seconde, appelée *glissement simple,* tous les points dans un certain plan restent dans ce plan après la déformation, avec leurs

positions primitives, et tous les points dans un plan parallèle au premier restent dans leur plan, mais y sont déplacés, dans des directions parallèles à une ligne donnée dans le premier plan, proportionnellement à leurs distances à ce plan.

Les formules définissant un glissement simple des plans $y' =$ const. parallèlement à l'axe des x' du trièdre coordonné $O'x'y'z'$ sont :

$$x'_1 = x' + gy', \quad y'_1 = y', \quad z'_1 = z',$$

g étant la grandeur du glissement. Les composantes de la déformation sont :

$$\varepsilon'_1 = 0, \quad \varepsilon'_2 = \frac{g^2}{2}, \quad \varepsilon'_3 = 0, \quad \gamma'_1 = 0, \quad \gamma'_2 = 0, \quad \gamma'_3 = g,$$

et les formules (15) du nº 5 donnent :

$$\alpha'_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha'_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'_3\right) = g.$$

La grandeur d'un glissement simple pour des axes de coordonnées quelconques est donc

$$g = \pm\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)},$$

et les conditions pour que la déformation en un point soit un glissement simple sont :

$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

III. — De la déformation infiniment petite.

11. — *Définition de la déformation infiniment petite.*

Considérons un milieu qui se déforme d'une façon continue, et supposons, pour fixer les idées, que dans les formules (10), qui déterminent les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nouvelle position du point (x, y, z), les quantités $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ soient fonctions de x, y, z et d'une nouvelle variable t ; le milieu proposé correspondra, par exemple, à la valeur zéro du paramètre t.

Lorsque t sera infiniment petit, les quantités variables en même temps que la déformation, telles, par exemple, que les fonctions ε_i, γ_i, différeront de leurs valeurs primitives de quantités infiniment petites ;

l'étude de la *déformation infiniment petite* du milieu considéré n'est autre que celle de la partie principale de tels infiniment petits.

Supposons que **u**, **v**, **w**, fonctions de la variable t en même temps que de x, y, z, puissent être développées suivant les puissances entières positives de t par des séries qui soient absolument et uniformément convergentes, ainsi que celles dont les termes s'en déduisent par différentiation par rapport à x, y, z; **u**, **v**, **w** devant se réduire respectivement à zéro pour $t = 0$, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u + u_1 + u_2 + \dots \\ \mathbf{v} &= v + v_1 + v_2 + \dots \\ \mathbf{w} &= w + w_1 + w_2 + \dots, \end{aligned}$$

en désignant par u, v, w les termes de ces développements qui renferment t en facteur, et généralement par u_n, v_n, w_n ceux qui renferment t^{n+1} en facteur.

12. — *Dilatations linéaires et glissements relatifs à la déformation infiniment petite.*

Avec les notations précédentes, nous aurons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \dots, & \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \dots, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \dots, & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \dots, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} + \dots, & \gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à la première.

Les dilatations linéaires au point P suivant Ox, Oy, Oz seront :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \dots,$$

et les dilatations angulaires au même point :

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \dots.$$

Lorsque t est suffisamment petit, les six composantes de la défor-

mation en un point ont sensiblement pour valeurs les expressions

$$(23)\quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & e_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & e_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ g_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & g_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & g_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Les trois premières e_1, e_2, e_3 sont aussi sensiblement les dilatations linéaires au point (x, y, z) suivant Ox, Oy, Oz; nous les appellerons les *dilatations linéaires relatives à la déformation infiniment petite*. Les trois autres g_1, g_2, g_3 sont de même sensiblement les valeurs des dilatations angulaires; nous les appellerons les *dilatations angulaires* ou encore les *glissements* (n° 10) *relatifs à la déformation infiniment petite*.

Lorsque t tend vers zéro, le déterminant Δ du n° 9 tend vers 1; pour t suffisamment petit, la dilatation cubique est

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \dots .$$

Sa valeur approchée

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

que nous appellerons *dilatation cubique relative à la déformation infiniment petite*, est égale à la somme des valeurs approchées des dilatations linéaires suivant les trois axes.

13. — *Rotation relative à la déformation infiniment petite.*

Passons à la rotation en un point du milieu; pour $t = 0$, elle se réduit évidemment à zéro, en sorte que des neuf cosinus a, b, c, ... qui figurent dans les équations (18) du n° 8, trois, a, b', c'' se réduisent à 1 pour $t = 0$; les six autres se réduisent à zéro.

Si l'on pose

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tau_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

on trouve immédiatement, au moyen des relations (21) et (22), les développements suivants :

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_3^2}{2} + \dots, & b &= -\tau_3 + \dots, & c &= \tau_2 + \dots, \\ a' &= \tau_3 + \dots, & b' &= 1 - \frac{\tau_3^2 + \tau_1^2}{2} + \dots, & c' &= -\tau_1 + \dots, \\ a'' &= -\tau_2 + \dots, & b'' &= \tau_1 + \dots, & c'' &= 1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{2} + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à celle qui entre dans les termes mis en évidence.

Si l'on définit la rotation par un segment porté sur l'axe de rotation et égal à la grandeur de la rotation, les formules (18) montrent alors que les projections de ce segment sont

$$\tau_1 + \ldots, \quad \tau_2 + \ldots; \quad \tau_3 + \ldots$$

La rotation définie, de la manière qui vient d'être indiquée, par le segment dont les projections sont τ_1, τ_2, τ_3, est la *rotation relative à la déformation infiniment petite* au point (x, y, z); si t est suffisamment petit, elle ne diffère pas sensiblement de la rotation au même point (x, y, z).

14. — *Proposition se rapportant au cas où les dilatations linéaires et les glissements relatifs à la déformation infiniment petite sont nuls.*

Cherchons ce que deviennent dans le cas de la déformation infiniment petite les propositions énoncées au n° 4.

La notion du *système auxiliaire* de M. Darboux va nous conduire facilement aux résultats que nous avons en vue.

Nous avons établi au n° 4 que le système d'équations aux dérivées partielles

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right)^2\right] = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}\right)^2\right] = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right)^2\right] = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0.\\
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0,
\end{aligned}\right.$$

définissant trois fonctions inconnues $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, admettait une solution et que cette solution correspondait au déplacement d'ensemble le

plus général d'un corps invariable, combiné ou non avec une transformation par symétrie [1].

Appliquons au système précédent la notion du système auxiliaire de M. Darboux, en partant de la solution de ce système, qui est formée de fonctions toutes nulles.

Le système auxiliaire sera formé des six équations

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=0,\\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \end{array}\right.$$

définissant trois fonctions inconnues u, v, w; sa solution générale correspond aux solutions infiniment petites du système (24), et elle sera, par conséquent, définie par les formules

$$u=u_0+bz-cy,\quad v=v_0+cx-az,\quad w=w_0+ay-bx,$$

où u_0, v_0, w_0, a, b, c sont des constantes, et qui déterminent la vitesse d'un point (x, y, z) d'un système invariable à un instant donné.

Pour parler autrement, la solution générale du système (25) correspond au déplacement infiniment petit d'un point (x, y, z) d'un système invariable, dans un mouvement infiniment petit de ce système.

On pourra rapprocher les considérations précédentes de celles qui se trouvent pages 107 et suivantes.

15. — *Équations de Barré de Saint-Venant.*

Nous avons vu au n° 4 que six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas représenter la déformation d'un milieu continu et qu'elles doivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (12) et leurs quatre analogues, où l'on considère les ε_i, γ_i comme des fonctions données, déterminent les inconnues $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

On peut dire encore que l'intégrale générale du système dont nous venons de parler est définie par les formules (12) et leurs analogues,

[1] Remarquons, en passant, la particularité qui se présente si l'on veut écrire des formules déterminant toutes les intégrales du système (24).

où **u**, **v**, **w** désignent des fonctions arbitraires. Ceci posé, envisageons la solution qui correspond aux valeurs $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{w} = 0$ de ces fonctions arbitraires, et qui est ainsi constituée de fonctions toutes nulles, et formons, à l'égard de cette solution, le système auxiliaire du système considéré. Envisagé comme définissant six fonctions inconnues e_i, g_i, ce système auxiliaire admettra une intégrale générale définie par les formules (23), où u, v, w désignent des fonctions arbitraires. Donc,

Six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas être prises pour représenter les dilatations linéaires et les glissements relatifs à une déformation infiniment petite; elles doivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (23), où les e_i, g_i sont supposées des fonctions données, déterminent des inconnues u, v, w; ce système n'est autre que le système auxiliaire, formé à l'égard de la solution constituée de fonctions toutes nulles, du système auquel satisfont les fonctions ε_i, γ_i associées à une déformation quelconque.

Pour établir directement les équations dont nous venons de parler, on peut, avec M. Beltrami, procéder de la façon suivante. Prenons comme inconnues auxiliaires les composantes τ_1, τ_2, τ_3 de la rotation; nous obtiendrons le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = e_1, && \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_3}{2} + \tau_3, && \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{g_2}{2} - \tau_2,\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g_3}{2} - \tau_3, && \frac{\partial v}{\partial y} = e_2, && \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{g_1}{2} + \tau_1,\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g_2}{2} + \tau_2, && \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g_1}{2} - \tau_1, && \frac{\partial w}{\partial z} = e_3.
\end{aligned}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions u, v, w, lorsque τ_1, τ_2, τ_3 sont supposées connues, s'obtiennent en écrivant :

$$\frac{\partial e_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right), \quad \frac{\partial e_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right)$$

et six relations analogues.

Les neuf relations ainsi obtenues se résolvent immédiatement par rapport aux dérivées partielles de τ_1, τ_2, τ_3 et les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de u, v, w sont celles qui expriment que le système suivant :

$$
(26)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \tau_1}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x} = \dfrac{\partial e_1}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial x} - \dfrac{\partial e_1}{\partial y}, \\
\dfrac{\partial \tau_1}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial y} - \dfrac{\partial e_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial y} = \dfrac{\partial e_2}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial y}, \\
\dfrac{\partial \tau_1}{\partial z} = \dfrac{\partial e_1}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial z} - \dfrac{\partial e_3}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y},
\end{array}\right.
$$

déterminant les auxiliaires τ_1, τ_2, τ_3, est compatible [1]. Nous obtenons ainsi les six équations données pour la première fois par Barré de Saint-Venant :

$$
(27)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z}\right) = 0, \\
\dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right) = 0, \\
\dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial y} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right) = 0.
\end{array}\right.
$$

IV. — De l'emploi du trièdre de référence mobile.

16. — *Quelques formules relatives à la déformation en général.*

L'étude de la déformation d'un milieu continu peut être envisagée comme étant celle du système triple de surfaces qui, dans le milieu déformé, correspond au système orthogonal de plans coordonnés auquel le milieu est rapporté avant la déformation.

Adjoignons à ce système triple de surfaces un trièdre mobile dont l'origine est au point P_1, dont les coordonnées, par rapport aux axes fixes, sont :

$$
x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w},
$$

et dont les axes P_1x', P_1y', P_1z' ont des directions définies par le

---

[1] Remarquons, en passant, que lorsque les e_i, g_i sont nuls, les considérations précédentes ne diffèrent pas de celles qui se trouvent pages 108 et 109.

tableau du n° 1 ; en conservant les notations de ce numéro, sauf en ce qui concerne les paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3, qui seront désignés ici respectivement par x, y, z, les formules (1) nous donnent les suivantes :

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} &= a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1, \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} &= a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1 \end{aligned}\right.$$

et les six analogues.

Désignons par $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ les projections du déplacement $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sur les axes du trièdre mobile; le point dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes fixes a pour coordonnées par rapport aux axes mobiles correspondants $-\mathbf{u}'$, $-\mathbf{v}'$, $-\mathbf{w}'$; nous pouvons donc identifier les trois expressions

$$a\,dx + a'dy + a''dz,\quad b\,dx + b'dy + b''dz,\quad c\,dx + c'dy + c''dz$$

avec celles qu'on déduit des formules (3) où l'on remplace ρ_1, ρ_2, ρ_3, x, y, z respectivement par x, y, z, $-\mathbf{u}'$, $-\mathbf{v}'$, $-\mathbf{w}'$. Il vient ainsi les relations

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= a + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + q_1\mathbf{w}' - r_1\mathbf{v}', \\ \eta_1 &= b + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + r_1\mathbf{u}' - p_1\mathbf{w}', \\ \zeta_1 &= c + \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x} + p_1\mathbf{v}' - q_1\mathbf{u}' \end{aligned}\right.$$

et six analogues, que l'on pourrait aussi établir par un calcul direct.

Maintenant, en rapprochant les formules (7) de celles du n° 3, nous avons les relations

$$\varepsilon_i = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 - 1}{2},\qquad \gamma_i = \xi_j\xi_k + \eta_j\eta_k + \zeta_j\zeta_k.$$

Parmi les particularisations du trièdre mobile qui sont utiles dans les applications, on peut signaler la suivante; prenons pour trièdre mobile le trièdre qui s'obtient en donnant au trièdre de sommet P_1, et dont les axes sont parallèles aux axes des x, y, z, la *rotation au*

point P (x, y, z) définie au n° (7). Les relations (22) deviennent ici, en vertu des formules (28), les suivantes :

(30) $$\eta_3 = \zeta_2, \quad \zeta_1 = \xi_3, \quad \xi_2 = \eta_1.$$

17. — *Formules relatives à la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le trièdre mobile : équations de Barré de Saint-Venant.*

Cherchons ce que donnent ici les considérations développées aux n°s 11 et suivants, à l'égard de la déformation infiniment petite, lorsqu'on particularise le trièdre mobile, comme nous venons de l'indiquer, de telle sorte que l'on ait les relations (30). Les relations (29) et leurs analogues, jointes aux résultats du n° 13, et aux formules (2), donnent alors immédiatement les développements suivants :

$$\begin{array}{lll}
\xi_1 = 1 + e_1 + \ldots, & \xi_2 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \xi_3 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, \\
\eta_1 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \eta_2 = 1 + e_2 + \ldots, & \eta_3 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, \\
\zeta_1 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, & \zeta_2 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, & \zeta_3 = 1 + e_3 + \ldots, \\
p_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \ldots, & p_2 = \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \ldots, & p_3 = \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \ldots, \\
q_1 = \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \ldots, & q_2 = \frac{\partial \tau_2}{\partial y} + \ldots, & q_3 = \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \ldots, \\
r_1 = \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \ldots, & r_2 = \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \ldots, & r_3 = \frac{\partial \tau_3}{\partial z} + \ldots,
\end{array}$$

où $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ sont définis par les formules (23), et τ_1, τ_2, τ_3 par les formules du n° 13.

Si nous portons ces développements dans les équations (4) et (5), et si nous n'avons égard qu'à la première puissance de t, il vient, en outre des relations identiques telles que

$$\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y \partial x},$$

les relations (26).

Nous sommes donc ramenés au système rencontré dans la démonstration que nous avons donnée, d'après M. Beltrami, des équations de Barré de Saint-Venant; les considérations précédentes doivent

être évidemment rapprochées de celles que nous avons développées au n° 15 relativement à l'application de la notion du système auxiliaire de M. Darboux.

V. — Du cas où le milieu non déformé est rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques.

18. — *Formules relatives à la déformation en général.*

Proposons-nous de chercher ce que deviennent les formules établies dans les paragraphes précédents lorsque le milieu non déformé est rapporté à un système triple quelconque de surfaces dont les paramètres sont ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pour ne pas multiplier les notations, nous conserverons, pour ce système triple, celles adoptées au n° 16 pour le système triple du corps déformé. Nous considérerons donc un trièdre mobile dont le sommet est au point P, qui a pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes des x, y, z, et dont les axes Px', Py', Pz' ont des directions définies par le tableau du n° 1 ; ξ_i, η_i, ζ_i seront les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_i varie seul et joue le rôle du temps ; p_i, q_i, r_i définiront, par rapport aux mêmes axes, la rotation du trièdre relative au paramètre ρ_i.

Les coordonnées x, y, z, par rapport aux axes fixes, de l'origine P du trièdre mobile sont des fonctions de ses coordonnées curvilignes qui vérifient, d'après les formules (1), les relations

$$(31)\qquad \begin{cases} dx = \sum (a\xi_i + b\eta_i + c\zeta_i)\, d\rho_i, \\ dy = \sum (a'\xi_i + b'\eta_i + c'\zeta_i)\, d\rho_i, \quad (i = 1, 2, 3), \\ dz = \sum (a''\xi_i + b''\eta_i + c''\zeta_i)\, d\rho_i ; \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$(32)\qquad \begin{cases} a\,dx + a'\,dy + a''\,dz = \sum \xi_i\, d\rho_i, \\ b\,dx + b'\,dy + b''\,dz = \sum \eta_i\, d\rho_i, \\ c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = \sum \zeta_i\, d\rho_i. \end{cases}$$

Soient **u**, **v**, **w** les projections sur les axes fixes du déplacement PP_1

du point P, et $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ les projections du même déplacement sur les axes mobiles.

Considérons le carré de l'arc élémentaire décrit par le point P_1, savoir :

$$(dx + d\mathbf{u})^2 + (dy + d\mathbf{v})^2 + (dz + d\mathbf{w})^2,$$

ou encore, avec les notations du n° 3,

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1 + 2\varepsilon_1)\, dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\, dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\, dz^2 + 2\gamma_1\, dy\, dz \\ &\qquad + 2\gamma_2\, dz\, dx + 2\gamma_3\, dx\, dy. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons le calculer au moyen des formules (3); il nous suffit de remplacer dans les trois expressions (3), les lettres x, y, z par les lettres $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, et de faire la somme des carrés, ce qui nous donne

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\sum\left(\xi_i + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \rho_i} + q_i \mathbf{w}' - r_i \mathbf{v}'\right) d\rho_i\right]^2 + \left[\sum\left(\eta_i + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \rho_i} + r_i \mathbf{u}' - p_i \mathbf{w}'\right)\right]^2 \\ &\qquad + \left[\sum\left(\zeta_i + \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \rho_i} + p_i \mathbf{v}' - q_i \mathbf{u}'\right)\right]^2. \end{aligned} \right.$$

Nous tirons de là la conclusion suivante :

Pour calculer les six composantes ε_i, γ_i de la déformation au point P, on effectuera dans la forme quadratique (34) en $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, la substitution définie par la résolution des formules (31) ou (32); on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx, dy, dz ainsi obtenue avec la forme quadratique (33).

On peut présenter la règle précédente sous une autre forme.

Prenons comme inconnues auxiliaires les composantes ε_i', γ_i' de la déformation au point P par rapport aux axes Px', Py', Pz' issus de ce point. D'après ce que nous avons dit au n° 10, dès que les six quantités ε_i', γ_i' seront connues, nous aurons les ε_i, γ_i par les formules

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1' a^2 + \varepsilon_2' b^2 + \varepsilon_3' c^2 + \gamma_1' bc + \gamma_2' ca + \gamma_3' ab, \\ \gamma_1 &= 2\varepsilon_1' a'a'' + 2\varepsilon_2' b'b'' + 2\varepsilon_3' c'c'' + \gamma_1' (b''c' + b'c'') \\ &\qquad + \gamma_2' (c'a'' + c''a') + \gamma_3' (a'b'' + a''b') \end{aligned} \right.$$

et les quatre analogues; d'autre part, d'après le même numéro, si l'on effectue sur la forme quadratique (33) la substitution définie par les formules

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= a\,dx' + b\,dy' + c\,dz', \\ dy &= a'\,dx' + b'\,dy' + c'\,dz', \\ dz &= a''\,dx' + b''\,dy' + c''\,dz', \end{aligned} \right.$$

on trouve la forme quadratique

$$(37)\quad \begin{cases} (1+2\varepsilon'_1)\,dx'^2 + (1+2\varepsilon'_2)\,dy'^2 + (1+2\varepsilon'_3)\,dz'^2 \\ \qquad + 2\gamma'_1 dy'\,dz' + 2\gamma'_2 dz'\,dx' + 2\gamma'_3 dx'\,dy'. \end{cases}$$

Si l'on compare (32) et (36), on a donc la règle suivante :

Pour calculer les six composantes ε'_i, γ'_i de la déformation au point P *par rapport aux axes* Px', Py', Pz', *on effectuera dans la forme quadratique* (34) *en* $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ *la substitution définie par la résolution des formules*

$$(38)\qquad dx' = \sum \xi_i d\rho_i,\quad dy' = \sum \eta_i d\rho_i,\quad dz' = \sum \zeta_i d\rho_i,$$

et on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' *ainsi obtenue avec la forme quadratique* (37).

19. — *Formules relatives à la déformation infiniment petite.*

Supposons, comme au n° 11, que **u**, **v**, **w** soient fonctions d'une variable t en même temps que de ρ_1, ρ_2, ρ_3, et puissent être développées suivant les puissances entières positives de t, par des séries absolument et uniformément convergentes dont les premiers termes soient u, v, w; les neuf cosinus a, b, c, ..., étant indépendants de t, **u**$'$, **v**$'$, **w**$'$ seront aussi développables par des séries dont les premiers termes u', v', w' seront respectivement les projections sur les axes mobiles du segment, dont les projections sur les axes fixes sont u, v, w.

Si nous cherchons les premiers termes e_i, g_i des développements de ε_i, γ_i, il suffira d'utiliser l'une des règles du numéro précédent; prenons la seconde; en désignant par e'_i, g'_i les premiers termes des développements de ε'_i, γ'_i, pour en déduire les e_i, g_i, il suffira de remplacer, dans les formules (35) et leurs analogues, ε_i, γ_i, ε'_i, γ'_i respectivement par e_i, g_i, e'_i, g'_i.

D'autre part, on aura la règle suivante :

Pour calculer les six quantités e'_i, g'_i, on effectuera dans la forme quadratique en $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ *suivante :*

$$\left[\sum\left(\frac{\partial u'}{\partial \rho_i} + q_i w' - r_i v'\right) d\rho_i\right] \times \sum \xi_i d\rho_i + \left[\sum\left(\frac{\partial v'}{\partial \rho_i} + r_i u' - p_i w'\right) d\rho_i\right]$$
$$\times \sum \eta_i d\rho_i + \left[\sum\left(\frac{\partial w'}{\partial \rho_i} + p_i v' - q_i u'\right) d\rho_i\right] \times \sum \zeta_i d\rho_i$$

la substitution définie par la résolution des formules (38), *et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en* dx', dy', dz' *ainsi obtenue avec la forme quadratique*

$$e'_1 dx'^2 + e'_2 dy'^2 + e'_3 dz'^2 + g'_1 dy' dz' + g'_2 dz' dx' + g'_3 dx' dy'.$$

Il est intéressant de reprendre, pour le cas général que nous venons d'envisager, les considérations développées aux n°s 16 et 17, mais nous nous bornerons ici aux indications précédentes.

NOTES DE L'AUTEUR

I

Coordonnées tétraédriques des segments.

écomposition 'un segment suivant les arêtes un tétraèdre.

1. Soit un tétraèdre dont les sommets seront désignés par 1, 2, 3, 4 et AB un segment. Joignons le point A à trois des sommets, à 1, 2, 3, par exemple; on peut regarder AB comme la somme géométrique de trois segments portés par les droites 1 A, 2 A, 3 A. Ces trois segments, à leur tour, peuvent être décomposés en d'autres portés par les six arêtes du tétraèdre, et en composant entre eux les segments portés par une même arête, on arrive à constater l'exactitude de ce théorème :

Tout segment AB *est équivalent à un système de six segments portés par les arêtes d'un tétraèdre donné.*

On peut ajouter que cette représentation n'a lieu que d'une manière. Soient, en effet, plus généralement, $(\overline{S_{12}}, \overline{S_{13}}, \overline{S_{14}}, \overline{S_{23}}, \overline{S_{42}}, \overline{S_{34}})$ et $(\overline{S'_{12}}, \overline{S'_{13}}, \ldots, \overline{S'_{34}},)$ deux systèmes de segments équivalents portés par les six arêtes d'un même tétraèdre, $\overline{S_{12}}$ et $\overline{S'_{12}}$ par l'arête $\overline{12}$, $\overline{S_{13}}$ et $\overline{S'_{13}}$ par l'arête $\overline{13}$, etc. L'équivalence de ces deux systèmes exige que leurs moments résultants relativement à tout axe de l'espace soient les mêmes. Prenons les moments par rapport à l'axe dirigé suivant l'arête $\overline{12}$, tous ces moments sont nuls sauf ceux des segments $\overline{S_{34}}$ et $\overline{S'_{34}}$ portés par l'arête opposée; l'égalité des moments entraine ici celle de ces deux segments eux-mêmes. Même démonstration pour tous les autres segments.

Ceci posé, considérons le segment $\overline{S_{ik}}$ porté par l'arête $\overline{ik}$; on peut regarder ce segment comme le produit du segment $\overline{ik}$ par un nombre algébrique p_{ik}. La valeur absolue de p_{ik} est le rapport des longueurs

de $\overline{S_{ik}}$ et de l'arête $\overline{ik}$; le signe de p_{ik} est + ou — selon que $\overline{S_{ik}}$ et l'arête $\overline{ik}$ sont de même sens ou bien non.

Si l'on changeait le sens de l'arête, ce qui revient à échanger i et k, on voit que p_{ik} changerait de signe; ce que l'on peut exprimer en écrivant

$$p_{ki} = -p_{ik},$$

on voit donc que l'on a six quantités

$$p_{12}, \quad p_{13}, \quad p_{14}, \quad p_{23}, \quad p_{34}, \quad p_{42},$$

Coordonnées tétraédriques.

qui définissent complètement le segment AB par rapport au tétraèdre proposé. Ces six quantités constituent les coordonnées tétraédriques du segment.

Considérons le système des six segments $\overline{S_{12}}$, $\overline{S_{13}}$, $\overline{S_{14}}$, $\overline{S_{34}}$, $\overline{S_{42}}$, $\overline{S_{23}}$. Les moments de ces segments pris deux à deux sont tous nuls sauf pour les trois couples portés par les arêtes opposées. L'automoment (p. 25) de ce système se réduit donc à

$$\text{moment}\left(\overline{S_{12}}, \overline{S_{34}}\right) + \text{moment}\left(\overline{S_{13}}, \overline{S_{42}}\right) + \text{moment}\left(\overline{S_{14}}, \overline{S_{23}}\right).$$

Or, si μ désigne le moment des arêtes $\overline{12}$ et $\overline{34}$, lequel est égal à celui des arêtes $\overline{13}$ et $\overline{42}$, et à celui des arêtes $\overline{14}$ et $\overline{23}$, et égal en valeur absolue au sextuple du volume du tétraèdre 1234, on voit facilement, d'après le n° 6, que

$$\text{moment}\left(\overline{S_{12}}, \overline{S_{34}}\right) = p_{12}.p_{34}.\mu,$$
$$\text{moment}\left(\overline{S_{13}}, \overline{S_{42}}\right) = p_{13}.p_{42}.\mu,$$
$$\text{moment}\left(\overline{S_{14}}, \overline{S_{23}}\right) = p_{14}.p_{23}.\mu,$$

d'où pour l'automoment,

$$\mu\,[p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}].$$

Mais le système étant équivalent à un segment unique $\overline{AB}$, cet automoment est nul, on a donc

Relation identique.

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Réciproquement, si six nombres p_{12}, p_{13}, ... sont liés par l'équation ci-dessus et si on les regarde comme des nombres par lesquels on multiplie les segments $\overline{12}$, $\overline{13}$, ... de manière à obtenir des segments $\overline{S_{12}}$, $\overline{S_{13}}$, ... portés par les arêtes du tétraèdre, ces six segments forment un système dont l'automoment est nul et qui, par consé-

quent, est équivalent à un segment unique ou exceptionnellement à un couple.

Moment de deux segments. Soient deux segments $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, dont p_{ik}, p'_{ik} sont les coordonnées tétraédriques.

Si, par le même raisonnement que ci-dessus, on cherche le moment de ces deux segments, on sera conduit à chercher les moments de segments $\overline{S_{ik}}$ et de segments $\overline{S'_{mn}}$ portés par les arêtes du tétraèdre. Six seulement de ces moments seront différents de zéro et l'on trouvera, comme ci-dessus, que le moment de $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ a cette expression:

$$\text{moment}\left(\overline{AB}, \overline{A'B'}\right) = (p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{23})\,\mu.$$

Autres coordonnées tétraédriques. Cherchons, par exemple, quel est le moment q_{34} du segment $\overline{AB}$ et du segment $\overline{34}$. Les coordonnées de ce dernier segment sont toutes nulles, sauf sa coordonnée p_{34} qui est égale à l'unité; on a donc, d'après cela, p_{12}, p_{13}, ... étant les coordonnées de $\overline{AB}$,

$$q_{34} = \mu p_{12}.$$

On aura ainsi pour les six arêtes,

$$q_{12} = \mu p_{34}, \quad q_{13} = \mu p_{42}, \quad q_{14} = \mu p_{23},$$
$$q_{34} = \mu p_{12}, \quad q_{42} = \mu p_{13}, \quad q_{23} = \mu p_{14}.$$

On peut prendre comme coordonnées du segment $\overline{AB}$, au lieu des nombres p_{ik} les nombres q_{ik}, qui représentent ses moments par rapport aux six arêtes du tétraèdre. Les formules de transformation précédentes montrent que les six coordonnées q_{ik} d'un segment vérifient la relation

$$q_{12}\cdot q_{34} + q_{13}\cdot q_{42} + q_{14}\cdot q_{23} = 0$$

et que le moment de deux segments a pour valeur, avec ces coordonnées,

$$\frac{1}{\mu}(q_{12}q'_{34} + q_{13}q'_{42} + q_{14}q'_{23} + q_{34}q'_{12} + q_{42}q'_{13} + q_{23}q'_{14}).$$

Coordonnées tétraédriques d'une droite. Observons que si les p_{ik} viennent à varier en conservant des rapports constants, ces quantités deviennent les coordonnées d'un segment de longueur indéterminée sur sa ligne d'action, elles constituent les *coordonnées tétraédriques* d'une droite.

Coordonnées tétraédriques d'un système de segments.

2. Considérons plusieurs segments $(p'_{12}, p'_{13}, \ldots)$ $(p''_{12}, p''_{13}, p''_{14}, \ldots)$ $(p'''_{12}, p'''_{13}, p'''_{14}, \ldots)$, et posons d'une façon générale

$$P_{ik} = p'_{ik} + p''_{ik} + p'''_{ik} + \ldots;$$

si l'on multiplie l'arête $\overline{ik}$ par P_{ik}, on obtient un certain segment $\overline{S_{ik}}$, ce qui fait en tout six segments $\overline{S_{12}}, \overline{S_{13}}, \overline{S_{14}}, \overline{S_{23}}, \overline{S_{34}}, \overline{S_{42}}$ portés par les arêtes du tétraèdre; de plus, l'ensemble de ces six segments forme évidemment un système équivalent au système des segments proposés. On peut dire de ces quantités P_{ik} que ce sont les coordonnées du système de segments. Cherchons l'expression du moment résultant du système de segments en question avec un segment donné X $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34}, p_{4})$.

Ce moment résultant sera la somme des moments de chacun des segments considérés avec le segment X, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mu\, \Sigma\, (p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{34} + p'_{34}p_{12} + p'_{42}p_{13} + p'_{34}p_{14})\\ = \mu\, [P_{12}p_{34} + P_{13}p_{42} + P_{14}p_{34} + P_{34}p_{12} + P_{42}p_{13} + P_{34}P_{14}].\end{aligned}$$

Forme réduite quand on rapporte à deux droites conjuguées.

Si, en particulier, la droite qui porte le segment X a un moment nul, on voit que le complexe linéaire qui est le lieu de ces axes sera représenté par l'équation

$$P_{12}p_{34} + P_{13}p_{42} + P_{14}p_{23} + P_{34}p_{12} + P_{42}p_{13} + P_{23}p_{14} = 0.$$

Supposons, par exemple, que les arêtes 12 et 34 soient deux droites conjuguées du complexe. Alors il existera un segment $\overline{S_{12}}$ porté par l'arête 12 et un segment $\overline{S_{34}}$ porté par l'arête 34, formant à eux deux un système équivalent au système proposé. Il en résulte que tous les P_{ik} sont alors nuls sauf P_{12} et P_{34}, et l'équation du complexe acquiert la forme plus simple.

$$P_{12} \cdot p_{34} + P_{34} \cdot p_{12} = 0,$$

ou encore $p_{34} + a p_{12} = 0$, a désignant une constante.

II

La théorie de Grassmann sur l'étendue figurée.

Systèmes de points.

1. Soient des points P_1, P_2, ... affectés de coefficients ou masses m_1, m_2, ... et ABC un triangle quelconque doué d'un sens de parcours, par exemple le sens ABC.

Formons la somme

$$m_1 \text{ tétraèdre } (ABCP_1) + m_2 \text{ tétraèdre } (ABCP_2) + \ldots,$$

où le tétraèdre $ABCP_i$ est le tétraèdre construit sur le segment $\overline{AB}$ et sur le segment $\overline{CP_i}$; supposons que pour d'autres points P'_1, P'_2, ... affectés des masses m'_1, m'_2, ..., le triangle ABC restant le même, la somme ci-dessus garde la même valeur, et cela *quel que soit le triangle* ABC. On dit alors que les deux systèmes des points P_1, P_2, ... et P'_1, P'_2, ... sont équivalents.

Tout système de points est, à ce point de vue, équivalent à un point unique affecté d'un coefficient ou masse égal à la somme des coefficients ou masses des points du système; ce point unique est le *centre de gravité* du système des points proposés.

Cette conception des systèmes de points équivalents, due à Grassmann, correspond au *Calcul Barycentrique* de Möbius et à la théorie classique des centres de gravité.

Systèmes de segments.

Considérons encore avec Grassmann des segments $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, ... affectés de coefficients m_1, m_2, ... et soit X un segment arbitraire quelconque, formons la somme

$$m_1 . \text{tétraèdre } (\overline{S_1}, \overline{X}) + m_2 \text{ tétraèdre } (\overline{S_2}, \overline{X}) + \ldots$$

où les signes sont pris conformément à nos conventions. Si, pour un

second système de segments $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$, ... et de coefficients m'_1, m'_2, ..., le segment X restant le même, la somme précédente conserve la même valeur et cela *quel que soit le segment* X, on dit que les deux systèmes de segments sont équivalents.

Cette notion est absolument la même que celle des systèmes de segments équivalents que nous avons donnée. Si l'on remplace, en effet, le segment $\overline{S_1}$ par le produit de ce segment par le nombre m_1, et de même pour tous les segments, on voit que l'on peut, sans inconvénient, réduire tous les m_i à l'unité dans la notion de la somme ci-dessus. Cependant, en vue des applications ultérieures de la notion de Grassmann il y a avantage à conserver ces coefficients.

Systèmes de triangles. Enfin, pour compléter la trilogie imaginée par Grassmann, supposons des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... doués de sens de parcours (l'ordre précédent des lettres peut être supposé fournir ce sens) et affectés de masses m_1, m_2, ..., prenons un point P quelconque et considérons encore la somme

$$m_1 \text{ tétraèdre } (A_1B_1C_1P) + m_2 \text{ tétraèdre } (A_2B_2C_2P) + \ldots,$$

où les tétraèdres sont définis, quant au signe, comme dans le premier cas.

Imaginons d'autres triangles affectés d'autres masses et supposons que, pour ces triangles et pour le même point P, la somme précédente reste la même *quel que soit le point* P. On dit alors que les deux systèmes de triangles sont équivalents.

On démontre aisément que tout système de triangles est réductible à un triangle unique affecté d'une certaine masse.

Grassmann appelle formes du premier ordre, du deuxième ordre, du troisième ordre les systèmes de points, de segments, de triangles.

Notation abrégée. **2.** On peut exprimer l'équivalence de deux systèmes de points en écrivant

$$m_1P_1 + m_2P_2 + \ldots = m'_1P'_1 + m'_2P'_2 + \ldots;$$

cette égalité symbolique remplace l'égalité de définition

$$\begin{aligned} m_1(P_1ABC) + m_1(P_2ABC) + \ldots \\ = m'_1(P'_1ABC) + m'_2(P'_2ABC) + \ldots. \end{aligned}$$

On peut en dire autant pour les formes équivalentes du second ordre et pour celles de troisième ordre. Une égalité symbolique telle que

$$m_1P_1Q_1 + m_2P_2Q_2 + \ldots = m'_1P'_1Q'_1 + m'_2P'_2Q'_2 + \ldots$$

exprime sous forme simplifiée l'égalité de définition

$$m_1 (P_1Q_1RS) + m_2 (P_2Q_2RS) + \ldots = m'_1 (P'_1Q'_1RS) + m'_2 (P'_2Q'_2RS) + \ldots,$$

où RS est un segment quelconque.

Addition et soustraction. Il est clair que dans une équation symbolique on peut réduire les termes semblables; que si, par exemple, P_2 coïncide avec P_1 on peut écrire $(m_1 + m_2) P_1$ au lieu de $m_1P_1 + m_2P_2$, et que l'on peut appliquer toutes les règles de l'addition et de la soustraction algébrique. De même dans le cas des formes du second ou du troisième ordre. Si, par exemple, on a un ensemble de termes tels que $\alpha PQ + \beta QP$, comme PQ et QP sont deux segments opposés, on pourra remplacer ces deux termes par le terme unique $(\alpha - \beta) PQ$. Toutes ces règles résultent immédiatement de ce fait que les équations dites symboliques ne sont que des écritures abrégées d'équations algébriques ordinaires.

Multiplication. La remarque due à Grassmann et qui a trait à la multiplication est beaucoup plus curieuse et en même temps féconde.

Supposons que l'on prenne deux formes d'un même ordre Φ, Φ' équivalentes et qu'on les multiplie par deux autres formes équivalentes Ψ, Ψ', mais *en tenant compte de l'ordre des facteurs* dans l'écriture de chaque produit partiel. On obtient ainsi deux formes équivalentes, ou plutôt les symboles de deux formes équivalentes.

Nous allons, par exemple, prouver que le produit de deux formes du premier ordre fournit une forme du second ordre équivalente à la forme obtenue en multipliant entre elles deux formes du premier ordre équivalentes respectivement aux deux premières.

Soient deux couples de formes équivalentes du premier ordre,

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots = m'_1A'_1 + m'_2A'_2 + \ldots$$
$$n_1B_1 + n_2B_2 + \ldots = n'_1B'_1 + n'_2B'_2 + \ldots.$$

La première égalité symbolique exprime au fond les égalités de sommes de tétraèdres,

$$\sum_i m_i (A_iPQR) = \sum_j m'_j (A'_jPQR),$$

où (A_iPQR) représente le tétraèdre construit sur A_i et sur le triangle quelconque PQR. Prenons pour le sommet P le point B_k, nous aurons

$$\sum_i m_i (A_iB_kQR) = \sum_j m'_j (A'_jB_kQR),$$

et en prenant $k = 1, 2, \ldots$ et ajoutant, après multiplication par

n_1, n_2, ... il viendra

$$\sum_{i,k} m_i n_k (A_i B_k QR) = \sum_{j,k} m'_j n_k (A'_j B_k QR).$$

Considérons actuellement les formes équivalentes composées des points B et B'; on a, par définition,

$$\sum_{k} n_k (B_k PQR) = \sum_{h} n'_h (B'_h PQR);$$

prenons pour P le point A'_j, multiplions par m'_j et ajoutons en prenant successivement $j = 1, 2, \ldots$, il viendra

$$\sum_{k,j} n_k m'_j (B_k A'_j QR) = \sum_{h,j} n'_h m'_j (B'_h A'_j QR);$$

si on échange dans tous les tétraèdres les deux premiers symboles, ils changent tous de signe; on a donc encore

$$\sum_{k,j} m'_j n_k (A'_j B_k QR) = \sum_{j,h} m'_j n'_h (A'_j B'_h QR);$$

on a donc, en comparant à l'égalité du haut,

$$\sum_{i,k} m_i n_k (A_i B_k QR) = \sum_{j,h} m'_j n'_h (A'_j B'_h QR).$$

Comme QR est un segment quelconque, on a donc symboliquement

$$\sum_{i,k} m_i n_k A_i B_k = \sum_{j,h} m'_j n'_h A'_j B'_h;$$

c'est-à-dire que le produit des symboles

$$\sum_{i} m_i A_i, \quad \sum_{k} n_k B_k$$

et le produit des symboles

$$\sum m'_j A'_j, \quad \sum_{h} n'_h B'_h,$$

équivalents aux premiers, constituent deux symboles d'éléments du second ordre équivalents. Il faut bien observer que dans cette multiplication l'interversion des facteurs n'est pas permise.

Applications. **3.** Dans les conceptions abstraites de ce genre il importe au plus haut point de bien montrer qu'elles se prêtent utilement aux applications. L'exemple suivant donnera une idée de la simplicité que l'on peut atteindre par l'application de la belle méthode de Grassmann.

Affectons des masses m_1, m_2, m_3, m_4 les sommets P_1, P_2, P_3, P_4 d'un tétraèdre de référence.

Soit M la somme de ces masses et P leur centre de gravité, en sorte que m_1, m_2, m_3, m_4 sont les coordonnées tétraédriques (ou barycentriques) du point P. On aura l'égalité symbolique

$$m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4 = M.P.$$

De même, si m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 sont les coordonnées d'un second point P', on aura, M' étant la somme des m'_i,

$$m'_1 P_1 + m'_2 P_2 + m'_3 P_3 + m'_4 P_4 = M'P'.$$

Nous allons appliquer le théorème précédent.

En formant le produit nous aurons

$$\begin{aligned} & m_1 m'_1 P_1 P_1 + m_1 m'_2 P_1 P_2 + m_1 m'_3 P_1 P_3 + m_1 m'_4 P_1 P_4 \\ + & m_2 m'_1 P_2 P_1 + m_2 m'_2 P_2 P_2 + m_2 m'_3 P_2 P_3 + m_2 m'_4 P_2 P_4 \\ + & m_3 m'_1 P_3 P_1 + m_3 m'_2 P_3 P_2 + m_3 m'_3 P_3 P_3 + m_3 m'_4 P_3 P_4 \\ + & m_4 m'_1 P_4 P_1 + m_4 m'_2 P_4 P_2 + m_4 m'_3 P_4 P_3 + m_4 m'_4 P_4 P_4 \\ = & M.M'.PP'. \end{aligned}$$

Les segments P_1P_1, P_2P_2, P_3P_3, P_4P_4 sont nuls, P_1P_2 et P_2P_1 sont opposés, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} MM'.PP' = & (m_1 m'_2 - m_2 m'_1) P_1 P_2 + (m_1 m'_3 - m_3 m'_1) P_1 P_3 \\ & + (m_1 m'_4 - m_4 m'_1) P_1 P_4 + (m_2 m'_3 - m_3 m'_2) P_2 P_3 \\ & + (m_4 m'_2 - m_2 m'_4) P_4 P_2 + (m_3 m'_4 - m_4 m'_3) P_3 P_4. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{m_1 m'_2 - m_2 m'_1}{M.M'}, & p_{13} &= \frac{m_1 m'_3 - m_3 m'_1}{M.M'}, \\ p_{14} &= \frac{m_1 m'_4 - m_4 m'_1}{M.M'}, & p_{23} &= \frac{m_2 m'_3 - m_3 m'_2}{M.M'}, \\ p_{42} &= \frac{m_4 m'_2 - m_2 m'_4}{M.M'}, & p_{34} &= \frac{m_3 m'_4 - m_4 m'_3}{M.M'}, \end{aligned}$$

l'équation symbolique qui précède s'écrit

$$\begin{aligned} PP' = & p_{12} P_1 P_2 + p_{13} P_1 P_3 + p_{14} P_1 P_4 \\ & + p_{23} P_2 P_3 + p_{42} P_4 P_2 + p_{34} P_3 P_4; \end{aligned}$$

elle exprime que le segment PP' est équivalent à six segments $\overline{S_{12}}$, $\overline{S_{13}}$, ... portés par les arêtes du tétraèdre de référence et qui s'obtiennent par la règle suivante : le segment $\overline{S_{ik}}$ est le produit par le nombre p_{ik} du segment $\overline{ik}$ égal à l'arête du tétraèdre.

On reconnait donc dans les nombres p_{ik} les nombres qui ont été définis dans la note I. Mais on voit ici l'avantage de la méthode de Grassmann. Non seulement elle nous prouve la possibilité de cette représentation tétraédrique du segment PP', mais encore elle nous fournit l'expression des coordonnées p_{ik} en fonction des coordonnées tétraédriques m_i, m'_i des extrémités P, P' de ce segment.

Grassmann a exposé sa méthode dans son traité *Die Ausdehnungslehre,* publié d'abord en 1844, puis en 1862.

III

Propriétés infinitésimales des complexes linéaires.

Plan osculateur d'une courbe dont les tangentes font partie d'un complexe.

1. Un complexe étant donné, il existe dans l'espace une infinité de courbes dont les tangentes font partie de ce complexe. Le plan osculateur à ces courbes donne lieu à un théorème que nous allons démontrer.

Soit d'abord ABCD. ... un polygone gauche dont les côtés font partie d'un complexe donné.

Les côtés BA, BC qui se croisent en B sont deux génératrices du cône du complexe qui a pour sommet le point B. Si l'on passe au cas d'une courbe dont AB, BC seront les tangentes, on voit que le plan ABC, qui devient le plan osculateur en B à la courbe, coupe le cône du complexe de sommet B suivant deux génératrices voisines BA et BC, ce plan est donc tangent suivant BA à ce cône. De là ce théorème général :

Si les tangentes d'une courbe font partie d'un complexe donné, le plan osculateur en tout point B *de cette courbe est tangent, suivant la tangente en* B, *au cône du complexe qui a pour sommet le point* B.

Dans le cas particulier d'un complexe linéaire, le cône se réduit au plan polaire et le théorème devient celui-ci :

Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire, le plan osculateur en chaque point de la courbe n'est autre que le plan polaire de ce point.

Supposons qu'on ait pris un tétraèdre de référence dont les arêtes opposées 12, 34 soient conjuguées par rapport au complexe linéaire;

nous avons vu plus haut (p. 422) que l'équation du complexe acquiert la forme simple

$$p_{12} + a p_{34} = 0.$$

Introduisons ici les coordonnées tétraédriques (x_1, x_2, x_3, x_4) (y_1, y_2, y_3, y_4) de deux points quelconques de la droite dont les coordonnées tétraédriques sont $(p_{12}, p_{13}, \ldots)$; nous avons vu dans la note II que p_{12} est proportionnel à $x_1 y_2 - y_1 x_2$ et p_{34} à $x_3 y_4 - y_3 x_4$. Donc, l'équation

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 + a(x_3 y_4 - y_3 x_4) = 0$$

exprime que la droite qui joint le point x au point y fait partie du complexe.

Détermination des courbes enveloppes des droites d'un complexe linéaire.

Supposons qu'il s'agisse d'exprimer que la tangente d'une courbe fait partie du complexe; il faudra que les points voisins x, $x + dx$ vérifient cette équation qui devient alors

$$(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + a(x_3 dx_4 - x_4 dx_3) = 0$$

ou encore

$$x_1^2 d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + a x_3^2 d\left(\frac{x_4}{x_3}\right) = 0.$$

Nous poserons

$$\frac{x_4}{x_3} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire, et il viendra

$$\frac{x_1}{x_3} = \sqrt{-a\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

Cette équation, jointe à la précédente, résoud complètement le problème de trouver toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

Propriétés de ces courbes.

Les courbes que nous venons de trouver présentent une série de propriétés curieuses. Nous signalerons entre autres la suivante :

Soit C une courbe appartenant par ses tangentes à un complexe linéaire et Δ une droite quelconque de ce complexe. Menons en un point M de la courbe C le plan osculateur μ, qui coupe en P la droite Δ; soit π le plan mené par M et Δ. *Le plan π est le plan polaire du point* P.

En effet, la droite MP, issue de M dans le plan μ, appartient au complexe, car le plan μ est le plan polaire de M. Le plan polaire de P doit donc être le plan mené par Δ et par PM, c'est le plan π.

Si le point M décrit la courbe C, le point P décrit la droite Δ et

le plan π varie en correspondant homographiquement à ce point. (Voir à la page 51.) Le lecteur démontrera aisément la réciproque suivante :

Si une courbe C *est telle que la trace* P *de son plan osculateur sur une droite* Δ *et le plan* π *mené par* Δ *et le point de contact se correspondent homographiquement, la courbe* C *appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et* Δ *est une droite de ce complexe.*

Voici encore une importante propriété des courbes que nous considérons.

Soient A, B, C, ... les points de rencontre d'une de ces courbes avec un plan φ quelconque; les plans osculateurs α, β, γ, ... en ces points sont les plans polaires des points A, B, C, ... qui sont dans le plan φ, donc ces plans osculateurs vont tous passer au pôle F de ce plan φ. Réciproquement, considérons un point F dans l'espace et soit φ son plan polaire; les plans osculateurs à la courbe issus du point F doivent avoir leurs points de contact dans le plan φ, puisque ces points de contact sont les pôles des plans cherchés. On applique ici le théorème 1 du n° 15, page 43.

On remarquera dès lors que la classe de la courbe est égale à son degré.

Hélices d'un complexe.

2. Il y a une infinité d'hélices dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire donné. Considérons, en effet, une droite Δ d'un complexe linéaire et envisageons l'hélice tangente à Δ qui aurait pour axe l'axe central du complexe. Les tangentes de cette hélice appartiennent toutes au complexe, car elles ont toutes même moment et même paramètre de projection par rapport à l'axe central.

L'équation qui termine le n° 13, page 39, prouve que toutes ces droites font partie du complexe du moment où l'une en fait partie.

Cubiques gauches.

Parmi les courbes algébriques jouissant de la propriété d'appartenir par leurs tangentes à un complexe linéaire, il faut signaler les cubiques gauches. Toute cubique gauche appartient par ses tangentes à un complexe linéaire.

Pour le prouver, prenons deux points 1 et 2 sur la courbe; soit 3 la trace de la tangente en 1 sur le plan osculateur en 2, et 4 la trace de la tangente en 2 sur le plan osculateur en 1. Nous prendrons le tétraèdre de référence 1234. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées barycentriques d'un point M de la courbe; le plan mené par M et l'arête 24 touche la courbe en 2 et ne la coupe qu'au point variable M; soit

$x_1 - tx_3 = 0$ l'équation de ce plan. Les coordonnées de M seront des polynômes du troisième degré du paramètre t.

$$\rho x_1 = \varphi_1(t), \quad \rho x_2 = \varphi_2(t), \quad \rho x_3 = \varphi_3(t), \quad \rho x_4 = \varphi_4(t).$$

Observons que t s'annule au point 2, et comme le plan $x_1 = 0$ est osculateur en 2, il faut que φ_1 admette la racine triple $t = 0$, on a donc $\varphi_1(t) = at^3$. On verra de même que φ_2 doit admettre une racine triple infinie, car le plan $x_2 = 0$ est osculateur en 1, c'est-à-dire au point qui correspond à $t = \infty$; donc $\varphi_2 = b$ est une constante. Quant à x_3, on a par définition $x_3 = \frac{x_1}{t} = at^2$. Enfin, le plan $x_4 = 0$ ou 1, 2, 3 touche en 1 la cubique et la coupe en 2; donc l'équation $\varphi_4 = 0$ doit admettre une racine double infinie (donnant deux fois le point 1) et une racine simple nulle (donnant le point 2); φ_4 a donc la forme $\varphi_4 = ct$, où c est une constante. La cubique est donc représentée par les équations

$$\rho x_1 = at^3, \quad \rho x_2 = b, \quad \rho x_3 = at^2, \quad \rho x_4 = ct.$$

On en tire facilement

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 - \frac{3b}{c}(x_3 dx_4 - x_4 dx_3) = 0,$$

ce qui prouve bien que les tangentes de la cubique font partie du complexe linéaire

$$p_{12} - \frac{3b}{c} p_{34} = 0.$$

Chasles a le premier attiré l'attention sur cette propriété des cubiques gauches, qui a été l'objet d'une belle étude présentée comme thèse par M. Appell.

Surfaces dont les normales appartiennent à un complexe linéaire.

3. Si l'on rapporte un complexe linéaire à un trièdre trirectangle dans lequel Oz soit l'axe du complexe, la condition pour que la droite X, Y, Z, L, M, N fasse partie du complexe s'écrit, comme on l'a vu,

$$N + hZ = 0.$$

Il est aisé de se convaincre d'après cela qu'il existe une infinité de surfaces dont les normales appartiennent au complexe.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface, p, q les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; les équations de la normale s'écrivent, x_1, y_1, z_1

étant les coordonnées courantes,

$$x_1 + pz_1, = x + pz,$$
$$y_1 + qz_1, = y + qz,$$

d'où l'on tire

$$py_1 - qx_1 = py - qx;$$

on en déduit que $-p, -q, +1, y + qz, -x - pz, py - qx$ sont les coordonnées de la normale; l'équation différentielle des surfaces cherchées est donc

$$py - qx + h = 0.$$

Si l'on fait un changement de coordonnées en posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on trouve qu'en coordonnées cylindro-polaires l'intégrale de l'équation ci-dessus s'écrit

$$z = + h\theta + \mathrm{F}(r),$$

où F représente une fonction arbitraire; c'est l'équation générale des hélicoïdes de pas h qui ont Oz pour axe.

Propriété des lignes asymptotiques et des lignes géodésiques de ces surfaces.

Les lignes asymptotiques de ces surfaces présentent une propriété intéressante; leurs bi-normales appartiennent au complexe linéaire. Cela résulte de ce que leurs bi-normales sont justement les normales à la surface.

Pour la même raison, les normales principales des géodésiques de ces surfaces appartiennent au complexe.

Les réciproques sont vraies, en sorte que la détermination des lignes dont les normales principales ou les bi-normales font partie d'un complexe linéaire se ramène à la recherche des géodésiques et des asymptotiques des surfaces hélicoïdes.

IV

Sur l'expression du travail virtuel des forces appliquées à un corps solide.

Supposons des forces F_1, F_2, ... appliquées aux points P_1, P_2, ... d'un corps solide.

Si l'on représente ces forces par des segments, on obtient un certain système de segments auquel Pluecker a donné le nom de *dyname* et Ball celui de *torseur*. On démontre en statique que si l'on remplace un ensemble de forces agissant sur un corps solide par un autre ensemble, ces deux ensembles de forces sont *statiquement équivalents* pourvu que les systèmes de segments qui les représentent soient eux-mêmes équivalents.

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du point d'application de la force F_i et X_i, Y_i, Z_i les projections de cette force elle-même, les coordonnées du système de segments constitué par les forces seront

$$\mathcal{X}=\sum X_i, \quad \mathcal{Y}=\sum Y_i, \quad \mathcal{Z}=\sum Z_i,$$
$$\mathcal{L}=\sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad \mathcal{M}=\sum (z_i X_i - x_i Z_i),$$
$$\mathcal{N}=\sum (x_i Y_i - y_i X_i).$$

Ceci posé, imaginons qu'on imprime au corps un mouvement hélicoïdal infiniment petit, dont le système des rotations ait pour coordonnées $(p, q, r, \xi, \eta, \zeta)$ et proposons-nous d'évaluer le travail virtuel effectué par toutes les forces pendant le laps de temps δt.

Le travail virtuel effectué par la force F_i appliquée au point P_i sera évidemment

$$[X_i v_{i,x} + Y_i v_{i,y} + Z_i v_{i,z}]\,\delta t,$$

où $v_{i,x}$, $v_{i,y}$, $v_{i,z}$ sont les projections de la vitesse d'entraînement du point P_i, en sorte que

$$v_{i,x}=\xi+qz_i-ry_i,\quad v_{i,y}=\eta+rx_i-pz_i,\quad v_{i,z}=\zeta+py_i-qx_i.$$

Le travail virtuel total sera la somme des travaux virtuels analogues,

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}&=\sum[X_i(\xi+qz_i-ry_i)+Y_i(\eta+rx_i-pz_i)\\&\qquad+Z_i(\zeta+py_i-qx_i)]\,\delta t\\&=[\xi\sum X_i+\eta\sum Y_i+\zeta\sum Z_i+p\sum(y_iZ_i-z_iY_i)\\&\qquad+q\sum(z_iX_i-x_iZ_i)+r\sum(x_iY_i-y_iX_i)]\,\delta t\end{aligned}$$

ou encore, en introduisant les coordonnées du dyname,

$$\delta\mathfrak{T}=[\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{Y}\eta+\mathfrak{Z}\zeta+\mathfrak{L}p+\mathfrak{M}q+\mathfrak{N}r]\,\delta t.$$

Le travail virtuel est donc égal au produit du temps écoulé δt *par le moment des deux systèmes de segments qui représentent, l'un le dyname des forces, et l'autre le système des rotations.*

Si un corps peut librement effectuer un déplacement hélicoïdal donné, un dyname appliqué à ce corps ne pourra y être en équilibre que si le travail virtuel de ce dyname est nul dans ce déplacement, c'est-à-dire *si le dyname et le système des rotati ns constituent deux systèmes de segments en inv l utin* (n° 11, p. 25)

$$\mathfrak{X}\xi+\mathfrak{Y}\eta+\mathfrak{Z}\zeta+\mathfrak{L}p+\mathfrak{M}q+\mathfrak{N}r=0.$$

Supposons un corps doué d'une liberté égale à m et soient u_1, u_2, ..., u_m les m paramètres dont dépend sa position.

Tout mouvement hélicoïdal imprimé au corps aura, comme on l'a vu, des coordonnées de la forme

$$\begin{aligned}&p_1u_1'+p_2u_2'+\ldots,\quad q_1u_1'+q_2u_2'+\ldots,\quad r_1u_1'+r_2u_2'+\ldots,\\&\xi_1u_1'+\xi_2u_2'+\ldots,\quad \eta_1u_1'+\eta_2u_2'+\ldots,\quad \zeta_1u_1'+\zeta_2u_2'+\ldots,\end{aligned}$$

où l'on a posé $u_i'=\dfrac{du_i}{dt}$; le travail virtuel d'un dyname appliqué au corps aura dès lors cette expression

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}=&(\mathfrak{X}\xi_1+\mathfrak{Y}\eta_1+\mathfrak{Z}\zeta_1+\mathfrak{L}p_1+\mathfrak{M}q_1+\mathfrak{N}r_1)\,\delta u_1\\&+(\mathfrak{X}\xi_2+\mathfrak{Y}\eta_2+\mathfrak{Z}\zeta_2+\mathfrak{L}p_2+\mathfrak{M}q_2+\mathfrak{N}r_2)\,\delta u_2\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(\mathfrak{X}\xi_m+\mathfrak{Y}\eta_m+\mathfrak{Z}\zeta_m+\mathfrak{L}p_m+\mathfrak{M}q_m+\mathfrak{N}r_m)\,\delta u_m.\end{aligned}$$

Pour que le dyname laisse le corps en équilibre, il faudra que l'on ait les équations

$$\mathcal{X}\xi_1 + \mathcal{Y}\eta_1 + \mathcal{Z}\zeta_1 + \mathcal{L}p_1 + \mathcal{M}q_1 + \mathcal{N}r_1 = 0,$$
$$\mathcal{X}\xi_2 + \mathcal{Y}\eta_2 + \mathcal{Z}\zeta_2 + \mathcal{L}p_2 + \mathcal{M}q_2 + \mathcal{N}r_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathcal{X}\xi_m + \mathcal{Y}\eta_m + \mathcal{Z}\zeta_m + \mathcal{L}p_m + \mathcal{M}q_m + \mathcal{N}r_m = 0.$$

Si, en particulier, le corps est entièrement libre, m est égal à 6 et les équations précédentes exigent que l'on ait $\mathcal{L} = 0$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = 0$, $\mathcal{X} = 0$, $\mathcal{Y} = 0$, $\mathcal{Z} = 0$. Ce sont les six équations de l'équilibre d'un corps solide libre.

V

Sur les volumes engendrés par un contour fermé.

J'ai dit dans l'introduction que la théorie de segments peut avoir d'autres applications que la statique et la cinématique du corps solide. En voici un exemple que j'ai déjà fait connaître ailleurs *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et *Journal de Mathématiques.)*

On connaît les curieux théorèmes de Guldin, dont on trouve le germe dans un énoncé obscur de Pappus et qui concernent soit le volume, soit la surface engendrés par la rotation d'un contour plan fermé tournant autour d'un axe tracé dans son plan.

Le théorème relatif au volume est susceptible d'une extension remarquable qui nous fournira précisément la nouvelle application à laquelle j'ai fait allusion.

Considérons en premier lieu un petit élément de surface plane ω, dont x, y, z seront les coordonnées du centre de gravité, et imprimons à cet élément un déplacement hélicoïdal dont le système des rotations ait les coordonnées $(p, q, r, \xi, \eta, \zeta)$.

Cet élément engendre un petit volume qu'on peut assimiler, si le mouvement a lieu pendant un temps infiniment petit δt, à un cylindre oblique dont ω serait la base et dont l'arête serait égale au déplacement infiniment petit du centre de gravité de l'élément. Ce déplacement a pour projections

$$l = (\xi + qz - ry)\,\delta t, \quad m = (\eta + rx - pz)\,\delta t,$$
$$n = (\zeta + py - qx)\,\delta t.$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément. Le volume du cylindre est égal au produit de sa section droite par la longueur de son arête. Or, la section droite a pour valeur

$$\omega \cos \theta,$$

où θ est l'angle de la normale à l'élément avec l'arête du cylindre, en sorte que

$$\cos\theta = \frac{\alpha l + \beta m + \gamma n}{\sqrt{l^2 + m^2 n^2}},$$

le volume du cylindre est donc égal à

$$\omega \cos\theta \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \omega(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$
$$= \omega\,[(\xi + qz - ry)\,\alpha + (\eta + rx - pz)\,\beta + (\zeta + py - qx)\,\gamma]\,\delta t.$$

Considérons maintenant une portion finie de surface, que nous découperons en petits éléments ω.

Dans le déplacement hélicoïdal infiniment petit, le volume balayé par la surface totale sera la somme des volumes balayés par les éléments ω. On aura donc pour le volume total

$$\mathrm{V} = \Big\{ \xi \iint \omega\alpha + \eta \iint \omega\beta + \zeta \iint \omega\gamma + p \iint (\gamma y - \beta z)\,\omega$$
$$+ q \iint (\alpha z - \gamma x)\,\omega + x \iint (\beta x - \alpha y)\,\omega \Big\}\,\delta t.$$

On voit figurer dans cette expression six intégrales doubles étendues chacune à toute la calotte de surface considérée.

Or, c'est un fait digne de remarque que ces six intégrales sont égales chacune à une intégrale simple prise suivant le contour qui limite la calotte, en sorte qu'elles ne dépendent que de ce contour limité.

Ce théorème est une conséquence d'une formule célèbre due à Stokes (¹). Dans le cas actuel on peut faire un raisonnement direct. Dans $\omega\alpha$ on reconnaît l'aire de la projection de l'élément ω sur le plan des y, z; on a donc

$$\omega\alpha = dy\,dz,$$

d'où

$$\iint d\omega = \iint dz\,dy = \int y\,dz = -\int z\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy) = \mathrm{A};$$

les intégrales simples sont prises suivant le contour et représentent

(¹) Ce théorème de Stokes se trouve démontré dans le tome I du *Traité d'Analyse* de M. Émile Picard.

l'aire de la projection du contour parcouru dans un sens convenable sur le plan des yz.

On a aussi

$$\iint \beta\omega = \frac{1}{2}\int (z\,dx - x\,dz) = \mathrm{B},$$
$$\iint \gamma\omega = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx) = \mathrm{C},$$

et B, C sont encore les aires des projections du contour sur le plan des zx et sur celui des xy. On trouve de même

$$\iint (\gamma y - \beta z)\,\omega = -\frac{1}{2}\int (y^2 + z^2)\,dx = \mathrm{L},$$
$$\iint (\alpha z - \gamma x)\,\omega = -\frac{1}{2}\int (z^2 + x^2)\,dy = \mathrm{M},$$
$$\iint (\beta x - \alpha y)\,\omega = -\frac{1}{2}\int (x^2 + y^2)\,dz = \mathrm{N},$$

et les intégrales sont prises encore suivant le contour parcouru dans le même sens que précédemment (1).

On trouve donc que le contour seul intervient et dès lors on peut oublier la cloison et dire que le volume est engendré par le contour fermé.

Ce volume a cette expression

$$(\mathrm{A}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{C}\zeta + \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,\delta t.$$

Concevons maintenant que le contour subisse un déplacement continu. On pourra le regarder comme une succession de mouvements de torsion infiniment petits et le volume intégral sera

$$\mathrm{V} = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{A}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{C}\zeta + \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,dt,$$

$\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, étant fonctions de t.

Posons alors

$$a = \int_{t_0}^{t} p\,dt, \qquad b = \int_{t_0}^{t} q\,dt, \qquad c = \int_{t_0}^{t} r\,dt,$$
$$l = \int_{t_0} \xi\,dt, \qquad m = \int_{t_0}^{t} \eta\,dt, \qquad n = \int_{t_0}^{t} \zeta\,dt,$$

(1) Pour plus de détails sur ces questions de sens, voir mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, t. V (4e série), p. 321.

et la formule ci-dessus devient

$$V = Al + Bm + Cn + La + Mb + Nc.$$

On voit que V *représente le moment des deux systèmes de segments* $\sum$ (A, B, C, L, M, N) et σ (a, b, c, l, m, n); *le premier système dépend uniquement du contour mis en mouvement, le second ne dépend au contraire que du mouvement qui a été imprimé.*

Supposons que le contour soit plan, prenons Oz normal au contour, au centre de gravité O de son aire et Ox, Oy dans le plan du contour.

On trouve dans ce cas que $A = B = 0$ et C est l'aire du contour; de même L, M, N sont nuls, en sorte que le système des segments lié au contour se réduit ici au segment C élevé perpendiculaire au plan du contour au centre de gravité de l'aire et égal justement à l'aire du contour.

Dans une rotation d'amplitude angulaire θ autour d'un axe Δ, le volume engendré par le contour sera égal au produit de θ par le moment de C par rapport à Δ. Si Δ est dans le plan de C, ce moment est égal à la plus courte distance p de C et de Δ, ou à la distance à Δ du centre de gravité, multipliée par C, soit p.C. Donc, dans ce cas, C.$p\theta$ représente le volume engendré par le contour. On retrouve ainsi le théorème de Guldin relatif au volume.

Si le mouvement du trièdre T est réglé de telle sorte que les axes de ce trièdre soient constamment l'un la tangente, l'autre la normale principale, l'autre la bi-normale d'une courbe, les expressions a, b, c, l, m, n ont des formes particulièrement simples qui mettent en évidence de nouvelles propriétés des courbes de M. Bertrand. Je renvoie pour ce point à mes Mémoires déjà cités en note.

NOTE VI

Sur le problème des centres de courbure dans le mouvement d'une figure plane.

Cas où la construction de Savary tombe en défaut,

La construction de Savary [1] tombe en défaut dans le cas où le point décrivant est sur la normale commune aux deux roulettes.

La formule 4 de la page 144 devient alors, θ étant égal à $\frac{\pi}{2}$,

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}.$$

Pour construire cette formule, rabattons en O'_f, O'_m, sur la tangente commune aux roulettes, les centres de courbure O_f, O_m. Soit ensuite menée la bissectrice de l'angle $O'_m O O_m$ *(fig. 91)*.

Appelons μ le centre de courbure de la trajectoire du point M, *les droites* $\mu O'_f$, $\mu O'_m$ *se coupent sur la bissectrice.*

En effet, les équations de $\mu O'_f$ et de $\mu O'_m$ sont

$$\frac{x}{R_f} + \frac{y}{r} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{R_m} + \frac{y}{\rho} - 1 = 0.$$

Or, en tenant compte de l'équation (1), on trouve l'identité qui prouve la proposition

$$\left(\frac{x}{R_f} + \frac{y}{r} - 1\right) - \left(\frac{x}{R_m} + \frac{y}{\rho} - 1\right) = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)(x - y).$$

[1] A la page 144 nous avons adopté une locution assez répandue, mais inexacte, qui attribue à Savary la formule fondamentale relative aux centres de courbure. En réalité, cette formule revient à Euler, comme la découverte de l'axe instantané et comme les formules attribuées à Olinde Rodrigues. Ces locutions erronées sont assurément plus commodes pour les mathématiciens; il semble presque qu'Euler ait, dans ces questions, découvert trop de théorèmes pour attacher son nom à aucun.

Il suffira donc de mener MO'_f, de prendre le point de rencontre G

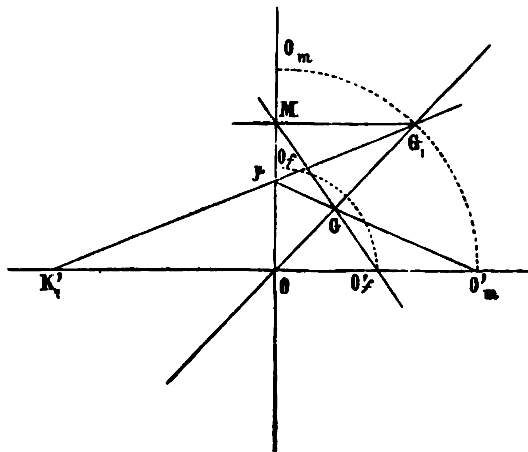


Fig. 91.

avec la bissectrice et de joindre O'_m au point G; la droite $O'_m G$ coupe en μ la normale.

On pourrait aussi se servir du point K'_1, rabattement du point K'. La parallèle MG_1 à OO'_m coupe en G_1 la bissectrice; la droite K'_1G_1 coupe la normale au point μ.

Le rabattement du point K donnerait une construction analogue.

Considérations géométriques sur la construction de Savary.

La construction de Savary donne lieu à quelques remarques géométriques dont nous avons déjà donné un exemple dans la proposition du nº 54. On peut rattacher cette proposition à un ensemble de faits d'ordre tout à fait élémentaire.

Rappelons que nous avons démontré au nº 52, page 152, la formule

$$(2) \qquad (\rho - r)(r_\infty - r) = r^2,$$

où r_∞ est la valeur de r pour laquelle ρ est infini. Cette valeur de r correspond, par conséquent, au point A où la droite OM coupe le cercle des inflexions qui est décrit sur OK' comme diamètre.

Considérons le cercle C qui a pour centre le point M et qui passe au centre instantané O *(fig. 92)*.

La formule (2) s'écrit encore

$$M\mu . MA = \overline{MO}^2,$$

elle exprime que la droite $K'A$, qui est perpendiculaire en A à OM est la polaire du point μ par rapport au cercle C.

Ainsi, *le centre de courbure* μ *est le pôle par rapport au cercle* C *de la droite* K'A.

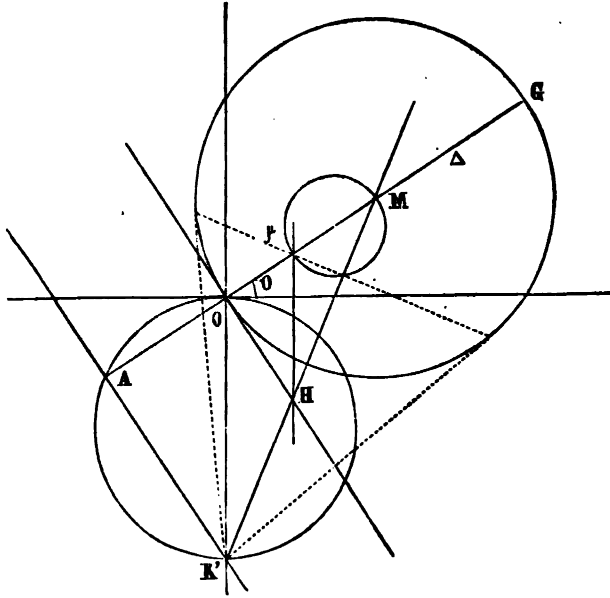


Fig. 92.

Nouvelle construction du centre de courbure.

On en conclut aussitôt que :

La polaire du point K' *par rapport au cercle* C *coupe la normale* OM *au centre de courbure* μ. Ce qui fournit une nouvelle construction de ce centre, construction qui ne tombe jamais en défaut.

Effectuons actuellement une transformation par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point M comme pôle et $\overline{MO}^2$ comme puissance d'inversion. Le cercle C se transforme en lui-même et la droite K'A devient le cercle C' décrit sur Mμ comme diamètre. De plus, la droite K'A est l'axe radial du cercle C et du cercle C', ainsi que cela résulte des propriétés connues de l'inversion.

On a donc ce théorème :

Le cercle décrit sur le rayon de courbure Mμ *comme diamètre et le cercle qui a pour centre le point* M *et qui passe au centre instantané ont pour axe radial une droite passant au point* K'.

C'est le théorème du n° 54.

Transformation quadratique bi-rationnelle.

La construction de Savary et la formule d'Euler, dont elle découle, font correspondre à tout point M du plan un point μ déterminé et inversement tout point μ du plan est le centre de courbure, à un instant donné, de la trajectoire d'un certain point M du plan. La correspondance est une de celles qu'a étudiées Cremona et qu'on a depuis appelées bi-rationnelles, pour rappeler que chaque point, M ou μ, a ses coordonnées exprimables sous forme de fonctions rationnelles des coordonnées de l'autre.

Dans la note de la page 151 nous avons indiqué que si x, y sont les coordonnées rectangulaires de M, ξ, η celles du point μ, les axes étant la tangente et la normale communes aux roulettes, on a les expressions rationnelles de ξ, η en x, y

$$(3) \qquad \xi = \frac{kyx}{x^2 + y^2 + ky}, \quad \eta = \frac{ky^2}{x^2 + y^2 + ky},$$

et que l'on tire ces autres expressions rationnelles

$$(4) \qquad x = \frac{k\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}, \quad y = \frac{k\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}.$$

Si l'on fait usage de coordonnées homogènes x, y, z, ξ, η, ζ, on voit que l'on a

$$\xi : \eta : \zeta :: kyx : ky^2 : x^2 + y^2 + kyz$$

et

$$x : y : z :: k\xi\eta : k\eta^2 : \xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta.$$

La transformation rentre dans la classe des transformations quadratiques bi-rationnelles. Dans ces transformations, à une droite du plan il correspond une conique, en sorte qu'à l'ensemble doublement infini des droites du plan il correspond une double infinité de coniques. Ces coniques passent par trois points fixes généralement distincts, et tel est le cas de l'inversion.

Ici ces trois points sont coïncidents, en sorte qu'aux droites du plan il correspond une double infinité de coniques osculatrices entre elles en un point fixe.

En effet, si le point M (x, y, z) décrit la droite

$$ux + vy + wz = 0,$$

les formules (4) montrent que le point μ (ξ, η, ζ) décrit la conique

$$(5) \qquad uk\xi\eta + vk\eta^2 + w(\xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta) = 0.$$

Or, il est aisé de voir que le cercle des rebroussements, qui est

représenté justement par l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta = 0$$

est osculateur à toutes ces coniques au point O, centre instantané, et que réciproquement toute conique osculatrice en O à ce cercle a une équation de la forme (5). Donc :

Conique de Rivals.

Quand le point M *décrit une droite, le point* μ *décrit une conique osculatrice au centre instantané au cercle des rebroussements et réciproquement.*

Quelques géomètres donnent à cette conique le nom de *Rivals,* du géomètre qui a le premier remarqué son existence. On observera que le cercle des rebroussements est la conique de Rivals de la droite de l'infini.

Si l'on cherche de même quel lieu doit décrire le point M pour que le point μ décrive une droite, on trouvera que M *doit décrire une conique osculatrice au centre instantané au cercle des inflexions et réciproquement.*

NOTE VII

Sur les accélérations.

La distribution de l'accélération dans un solide en mouvement a fait l'objet de diverses recherches parmi lesquelles il convient de citer un mémoire détaillé de M. Gruey, publié en 1878, *Sur les accélérations des points d'un solide en mouvement;* le livre plus récent de M. Schœnflies *Sur la géométrie du mouvement,* et enfin un mémoire de M. Gilbert, publié en 1890, sous le titre : *Recherches sur les accélérations en général.*

Interprétation des équations de l'accélération.

La forme linéaire des équations établies à la page 131 :

$$(1)\qquad \begin{cases} J_x = \xi_1 + q'z - r'y + \dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ J_y = \eta_1 + r'x - p'z + \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ J_z = \zeta_1 + p'y - q'x + \dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

où

$$(2)\qquad 2H = (px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

et le fait qu'elles sont entières par rapport à x, y, z prouve que si $\overline{MJ}$ est le segment représentatif de l'accélération du point M (x, y, z), le point J correspond homographiquement au point M ; de plus, dans cette homographie, le plan de l'infini se correspond à lui-même.

On peut aussi supposer qu'on a transporté en une origine fixe O, en $\overline{OJ_1}$, l'accélération MJ ; le point J_1, dont J_x, J_y, J_z sont les coordonnées, correspond encore homographiquement au point M et le plan de l'infini est encore son propre homologue dans cette homographie.

Ces remarques sont la base des considérations développées par M. Gruey dans son mémoire.

D'abord, l'existence du centre des accélérations, qui ne disparaît que dans des cas particuliers, permet en général de ramener à zéro les valeurs de ξ_1, η_1, ζ_1 relatives à l'époque que l'on considère. Les formules (1) sont alors homogènes en x, y, z, en sorte que, soit dans l'homographie $\mathcal{H}$ qui relie J et M, soit dans l'homographie $\mathcal{H}_1$ qui relie J_1 et M, le centre O des accélérations est son propre homologue.

Directions qui sont eurs propres homologues.

Comme le plan de l'infini est son propre homologue, il y aura dans ce plan trois points A, B, C qui seront leurs propres homologues; on obtiendra ces points en résolvant les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} q'z - r'y + \dfrac{\partial H}{\partial x} = Sx, \\ r'x - p'z + \dfrac{\partial H}{\partial y} = Sy, \\ p'y - q'x + \dfrac{\partial H}{\partial z} = Sz, \end{cases}$$

L'élimination de x, y, z entre ces équations fournira l'équation en S du troisième degré dont dépend le problème de la détermination des trois droites OA, OB, OC. (Voir le chapitre XII.)

On obtiendra ainsi trois directions de droites OA, OB, OC, réelles, imaginaires, distinctes ou confondues, selon la nature des racines de cette équation du troisième degré; M. Gruey en a fait la discussion.

On observera que, dans l'une et l'autre des deux homographies, la droite OA est sa propre homologue, et de même pour OB, OC.

Si l'on prend un point M sur l'une de ces droites, J, J_1 y seront aussi. *Les droites* OA, OB, OC *sont les lieux des points* M *dont l'accélération passe par le centre des accélérations* O.

D'après les propriétés de l'homographie, les points M, J, J_1 supposés variables, décriront des surfaces du même degré ou des courbes du même degré.

De plus, les points à l'infini de ces surfaces ou de ces courbes sont homologues entre eux, en sorte que si l'une de ces courbes ou surfaces n'a pas de point réel à l'infini, il en est de même des autres.

Ellipsoïdes d'égale accélération.

C'est ainsi que si $\overline{OJ_1}$, c'est-à-dire l'accélération de M, a une valeur constante, J_1 décrit une sphère de centre O. Le point M décrit alors un ellipsoïde E.

C'est ce que donne du reste le calcul. On a, en effet,

$$\overline{OJ_1}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

On reconnaît, de plus, que le centre des accélérations est le centre de l'ellipsoïde E, et que si l'on fait varier la longueur constante de $\overline{OJ_1}$, les divers ellipsoïdes E sont non seulement concentriques, mais homothétiques.

Point d'accélération minimum dans un plan.

Étant donné un plan π, les ellipsoïdes E découpent sur lui des ellipses concentriques sur lesquelles se groupent les points de ce plan qui ont même accélération.

Le centre commun P de ces ellipses est le point de contact du plan π avec celui des ellipsoïdes E qui touche ce plan.

Le point P *est le point du plan* π *dont l'accélération est minimum.*

Soit $\overline{PP'}$ l'accélération de ce point P.

M. Gruey a démontré ce curieux théorème :

Théorème de M. Gruey.

Les projections sur la droite PP' *des accélérations des divers points* M *du plan* π *sont constantes et égales en grandeur et sens à l'accélération même* $\overline{PP'}$ *du point P.*

M. Gruey a groupé autour de ces ellipsoïdes E un grand nombre de propriétés des accélérations.

Signalons encore la proposition suivante :

Si un plan π *passe au centre* O *des accélérations, les accélérations de ses points sont rectangulaires avec une droite* OR *et réciproquement. Le diamètre conjugué du plan* π *dans les ellipsoïdes* E *a les accélérations de ses points parallèles à la droite* OQ.

Du reste, d'une façon générale, *les accélérations des points d'une droite sont parallèles à un plan fixe et engendrent un paraboloïde hyperbolique.*

M. Gilbert, dans son mémoire déjà cité, est revenu sur ces diverses questions et en a généralisé certaines.

Sa méthode repose sur le théorème suivant, dû à Resal, dont la démonstration résulte immédiatement des méthodes générales développées dans le texte de ce livre :

Théorème de M. Résal.

Si un solide tournant autour d'un point fixe O *est rapporté à un trièdre de référence mobile ayant son sommet en* O, *l'accélération angulaire absolue du solide est la résultante de l'accélération angulaire relative, de l'accélération angulaire d'entraînement et de l'accélération angulaire composée.*

Nous avons défini au nº 67 l'accélération angulaire. Soit $\overline{O\Omega}$ le segment qui représente la rotation absolue du solide; $\overline{O\Omega'}$ le segment

qui représente sa rotation relative par rapport au trièdre $Oxyz$ et enfin $\overline{O\Omega''}$ le segment qui représente la rotation du trièdre $Oxyz$ lui-même. Il est clair que $\overline{O\Omega}$ est la somme géométrique de $\overline{O\Omega'}$ et de $\overline{O\Omega''}$.

$$\overline{O\Omega} = \overline{O\Omega'} + \overline{O\Omega''}.$$

La vitesse absolue de Ω est l'accélération angulaire absolue. La vitesse de Ω' par rapport au trièdre $Oxyz$ est l'accélération angulaire relative, enfin la vitesse absolue de Ω'' est l'accélération angulaire d'entraînement.

Or, si x, x', x'' sont les projections de $\overline{O\Omega}$, $\overline{O\Omega'}$, $\overline{O\Omega''}$ sur un axe fixe, la relation géométrique ci-dessus donne

$$x = x' + x'',$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx''}{dt}.$$

On peut en conclure que la vitesse absolue de Ω est la somme géométrique des vitesses absolues de Ω' et de Ω''.

Vitesse absolue de Ω = vitesse absolue de Ω'
+ vitesse absolue de Ω''.

Or, il est clair que la vitesse absolue de Ω' est égale à sa vitesse relative plus sa vitesse d'entraînement. Désignons par $\bar{\gamma}$, $\overline{\gamma'}$, $\overline{\gamma''}$ les accélérations angulaires absolue, relative et d'entraînement, on aura

$$\bar{\gamma} = \overline{\gamma'} + \overline{\gamma''} + \text{vitesse d'entraînement de } \Omega'.$$

C'est à cette dernière vitesse qu'on donne le nom d'accélération angulaire composée.

Calcul des accélérations supérieures.

Je terminerai cette note en disant un mot sur les accélérations d'ordre supérieur dont la définition a été donnée à la page 66.

Le calcul qui permet de passer de la vitesse à l'accélération donne aussi les composantes des accélérations d'ordre supérieur.

Par un point fixe A menons un segment $\overline{AJ_n}$ équipollent à l'accélération du $n^{\text{ième}}$ ordre d'un point mobile M rapporté à un trièdre de référence mobile $Oxyz$. La vitesse absolue du point J_n est, par définition, l'accélération de l'ordre $(n+1)$ du point M.

Or, soient $J_{n,x}$, $J_{n,y}$, $J_{n,z}$ les projections de J_n sur les axes Ox, Oy, Oz; x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, les coordonnées du point J_n seront

$$X = x_0 + J_{n,x}, \quad Y = y_0 + J_{n,y}, \quad Z = z_0 + J_{n,z}.$$

Les projections de la vitesse absolue du point J_n sur les axes Ox, Oy, Oz seront les projections $J_{n+1,x}$, $J_{n+1,y}$, $J_{n+1,z}$ de l'accélération d'ordre $(n+1)$, et on aura, dès lors, en appliquant les formules connues

$$J_{n+1,x} = \xi + qZ - rY + \frac{dX}{dt}$$

et deux autres équations analogues. En remplaçant X, Y, Z par leurs expressions et remarquant que l'on a

$$\xi + qz_0 - ry_0 + \frac{dx_0}{dt} = 0,$$

puisque la vitesse absolue de A est nulle, il reste

$$J_{n+1,x} = qJ_{n,z} - rJ_{n,y} + \frac{dJ_{n,x}}{dt},$$

et les deux autres équations analogues

$$J_{n+1,y} = rJ_{n,x} - pJ_{n,z} + \frac{dJ_{n,y}}{dt},$$

$$J_{n+1,z} = pJ_{n,y} - qJ_{n,x} + \frac{dJ_{n,z}}{dt}.$$

Telles sont les formules qui, par voie de récurrence, permettront de calculer de proche en proche les diverses accélérations d'ordre supérieur.

NOTE VIII

Sur la théorie de la vis de M. Ball.

Rappel de la définition de la vis.

A la page 36 on a donné la définition de la vis. Si l'on multiplie ou divise les segments d'un système par un même nombre positif ou négatif, les coordonnées de ce système sont évidemment multipliées ou divisées par ce nombre, et l'on peut dire alors que le système lui-même a été soit multiplié, soit divisé par ce même nombre. En divisant ainsi un système de segments par la longueur de sa résultante de translation prise en valeur absolue, on obtient un système de segments *unitaire*, c'est-à-dire une vis, dont l'axe a le sens de la résultante de translation du système et dont le paramètre ou pas est égal au paramètre du système (voir p. 26).

Tout système de segments est le produit d'une vis par un nombre.

Si, au lieu de diviser par la longueur de la résultante de translation prise positivement, on avait divisé par cette longueur affectée du signe —, on aurait obtenu encore une vis dont le pas serait égal à celui de la première, mais dont l'axe aurait eu le sens opposé. Tout système de segments donne ainsi naissance à deux vis *opposées* de même pas, mais d'axes opposés, de même que tout segment donne lieu à deux axes opposés entre eux, dont l'un a le sens du segment et l'autre le sens contraire.

On peut donc dire que tout système de segments est égal au produit d'une vis par un nombre positif ou négatif, selon que l'axe de la vis considérée a ou n'a pas le sens de la résultante de translation du système.

Exemple tiré des rotations.

Supposons, par exemple, que les segments représentent des rotations; leur système représente un mouvement hélicoïdal dans lequel, dans un temps infiniment petit, chaque point du corps décrit un élément d'hélice. Toutes les hélices ainsi décrites ont même axe, même pas, ce dernier égal au paramètre du système. L'ensemble de

ces hélices constitue une vis, en ce sens que si l'on prend toutes celles qui traversent un contour fermé dans l'espace, elles forment un noyau solide hélicoïdal, comme la vis en offre un exemple. La définition d'un tel système de vis est complète si l'on connaît son axe et son pas, c'est-à-dire les éléments d'un système de segments unitaire.

Mouvement suivant une vis.

Quant au mouvement hélicoïdal, on peut dire qu'il a lieu sur la vis ou qu'il est supporté par elle; il est différentié de tous les autres mouvements qui ont lieu sur la même vis par la longueur de la résultante de translation, c'est-à-dire par sa vitesse angulaire.

Système de forces agissant suivant une vis.

Semblablement, si l'on envisage un ensemble de forces appliquées à un corps solide, cet ensemble constitue un système de segments que l'on pourra regarder comme provenant du produit d'une certaine vis par le nombre qui représente la longueur de la résultante de translation. Pluecker a appelé *dyname* et Ball *torseur* tout système des forces appliqué à un solide. D'après cela nous saurons ce que signifie l'expression de *dyname* ou de *torseur portée par une vis ou qui s'exerce suivant une vis.*

Vis de coordonnées dans un corps doué d'un degré n de liberté.

Ces explications données, considérons un corps solide mobile possédant le degré n de liberté.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les n paramètres dont dépend sa position. Les projections sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz liés au corps, de la vitesse d'entraînement d'un point x, y, z de ce corps ont, nous le savons (p. 226), des expressions de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} v_x &= \Sigma\xi_i\frac{du_i}{dt} + z\Sigma q_i\frac{du_i}{dt} - y\Sigma r_i\frac{du_i}{dt},\\ v_y &= \Sigma\eta_i\frac{du_i}{dt} + x\Sigma r_i\frac{du_i}{dt} - z\Sigma p_i\frac{du_i}{dt},\\ v_z &= \Sigma\zeta_i\frac{du_i}{dt} + y\Sigma p_i\frac{du_i}{dt} - x\Sigma q_i\frac{du_i}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Considérons les n vis S_i qui ont pour coordonnées

$$(2)\qquad \frac{p_i}{U_i},\quad \frac{q_i}{U_i},\quad \frac{r_i}{U_i},\quad \frac{\xi_i}{U_i},\quad \frac{\eta_i}{U_i},\quad \frac{\zeta_i}{U_i},$$

où $U_i = +\sqrt{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}$.

Tout déplacement du corps résulte, d'après les formules précédentes, de n mouvements hélicoïdaux infiniment petits, sur les vis S_i, d'amplitudes égales respectivement à $U_i du_i$.

Les n vis S_i constituent le système des ***n* vis de coordonnées.**

Si l'on effectue un changement de variables portant sur les u_i,

il est clair que le système des vis de coordonnées se trouve changé.

Ces vis jouent un rôle analogue aux tangentes aux courbes de coordonnées dans la géométrie sur les surfaces.

Il est naturel, comme on le fait pour les surfaces, de chercher des systèmes de coordonnées qui présentent des caractères propres à simplifier les formules ou les raisonnements. C'est ainsi qu'il est souvent commode dans la théorie des surfaces de rapporter celles-ci à leurs lignes de courbures ou à une famille de géodésiques accompagnées de leurs trajectoires.

Dans ce genre de questions, la considération de certaines formes quadratiques joue un rôle fondamental. Une de ces formes sera ici celle qui exprime le carré de la vitesse

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} V^2 = &\left(\Sigma\xi_i \frac{du_i}{dt} + z\Sigma q_i \frac{du_i}{dt} - y\Sigma r_i \frac{du_i}{dt}\right)^2 \\ &+ \left(\Sigma\eta_i \frac{du_i}{dt} + x\Sigma r_i \frac{du_i}{dt} - z\Sigma p_i \frac{du_i}{dt}\right)^2 \\ &+ \left(\Sigma\zeta_i \frac{du_i}{dt} + y\Sigma p_i \frac{du_i}{dt} - x\Sigma q_i \frac{du_i}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas de 2 paramètres on est toujours certain de pouvoir, par un changement de variables, la ramener à une somme de deux carrés.

Dans le cas de 3 ou d'un plus grand degré de liberté il n'en est plus toujours de même.

Nous nous bornons à signaler ici cette intéressante question.

Introduction des notions dynamiques.

Des considérations dynamiques ont conduit M. Ball à la notion importante des *vis principales*.

On sait que, dans le cas d'un solide mobile autour d'un point fixe, il y a trois axes *principaux* issus de ce point, qui possèdent la propriété que si l'on imprime au corps une impulsion représentée par un couple dont le plan soit normal à l'un de ces axes, le mouvement qui tend à se produire consiste en une rotation autour de ce même axe.

Considérons plus généralement un corps doué d'un degré n de liberté; supposons que dans une position déterminée on lui imprime brusquement un ensemble de forces, un dyname ou torseur, porté par une vis S, et que le mouvement que prend le corps consiste, au moins au début, en un mouvement hélicoïdal suivant la même vis S. Nous dirons alors que la vis S est principale. *Il y a n vis principales.*

Équations générales du mouvement.

Pour démontrer cette proposition, nous allons d'abord établir les équations générales du mouvement.

Partons de l'équation de d'Alembert

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)-\Sigma(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z)=0,$$

où les δ correspondent aux variations compatibles avec les liaisons. Nous allons introduire les paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui sont indépendants et dont dépend la position du corps.

Appelons 2T la force vive, qui s'exprimera en $u_1, u_2, \ldots, u_n, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ par la formule

$$(4)\qquad \begin{aligned}2\mathrm{T}=\sum m\,\big\{&(\Sigma\xi_i u'_i+z\Sigma q_i u'_i-y\Sigma r_i u'_i)^2\\&+(\Sigma\eta_i u'_i+x\Sigma r_i u'_i-z\Sigma p_i u'_i)^2\\&+(\Sigma\zeta_i u'_i+y\Sigma p_i u'_i-x\Sigma q_i u'_i)^2\big\},\end{aligned}$$

on a posé $u'_i=\dfrac{du_i}{dt}$.

On sait que l'expression $\sum m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\delta x+\dfrac{d^2y}{dt^2}\delta y+\dfrac{d^2z}{dt^2}\delta z^2\right)$ se transforme en

$$\sum\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u'_i}\right)-\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u_i}\right\}\delta u_i.$$

Quant à $\sum(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z)$, c'est la somme des travaux virtuels des forces appliquées au corps dans un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons.

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ les coordonnées, par rapport aux axes mobiles Ox, Oy, Oz, du dyname constitué par ces forces; d'après le résultat établi dans la note IV, le travail de ces forces dans un déplacement virtuel quelconque aura pour expression

$$\sum_i(\mathcal{A}\xi_i+\mathcal{B}\eta_i+\mathcal{C}\zeta_i+\mathcal{L}p_i+\mathcal{M}q_i+\mathcal{N}r_i)\,\delta u_i$$

et, par conséquent, les n équations différentielles du mouvement s'écrivent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u'_i}\right)-\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u_i}\right)&=\mathcal{A}\xi_i+\mathcal{B}\eta_i+\mathcal{C}\zeta_i\\&\quad+\mathcal{L}p_i+\mathcal{M}q_i+\mathcal{N}r_i=\mathrm{P}_i\\&(i=1, 2, \ldots, n),\end{aligned}\right.$$

en désignant, pour abréger, par P_i le second membre.

Recherche des vis principales.

Soit $\mathrm{A}_{i,\rho}$, le coefficient du terme $u'u'_\rho$ dans 2T, les équations précédentes peuvent s'écrire, en désignant par u''_ρ la dérivée seconde de u_ρ

par rapport au temps,

$$(6) \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{i,\rho}\, u''_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\partial^2 T}{\partial u'_i\, \partial u_\rho}\, u'_\rho - \frac{\partial T}{\partial u_i} = P_i.$$

Supposons que le corps étant dans la position caractérisée par les valeurs $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ des paramètres, on lui applique brusquement le dyname $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$; un certain mouvement va se produire qui sera défini par des équations de la forme

$$(7) \qquad u_i = u_i^0 + * + u_i''^0 \frac{t^2}{2} + \ldots;$$

une étoile marque l'absence du terme $u_i'^0 t$, car les $u_i'^0$ sont nuls par hypothèse.

On aura aussi

$$(8) \qquad u'_i = u_i''^0 t + \ldots.$$

Les valeurs de $u_i''^0$ seront données par les équations (6) où l'on fait $u_i = u_i^0$, $u'_i = 0$, et qui deviennent alors

$$(9) \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{i,\rho}^0\, u_\rho''^0 = P_i^0 = \mathcal{A}\xi_i^0 + \mathcal{B}\eta_i^0 + \mathcal{C}\zeta_i^0 + \mathcal{L}p_i^0 + \mathcal{M}q_i^0 + \mathcal{N}r_i^0.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Quant aux coordonnées $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ du mouvement hélicoïdal tangent, elles sont données par les formules

$$(10) \quad \begin{cases} p = \Sigma p_\rho u'_\rho, & q = \Sigma q_\rho u'_\rho, & r = \Sigma r_\rho u'_\rho, \\ \xi = \Sigma \xi_\rho u'_\rho, & \eta = \Sigma \eta_\rho u'_\rho, & \zeta = \Sigma \zeta_\rho u'_\rho, \end{cases}$$

où l'on a

$$(11) \quad p_\rho = p_\rho^0 + p_\rho'^0 t + \ldots, \quad q_\rho = q_\rho^0 + q_\rho'^0 t + \ldots, \text{ etc.}$$

Les expressions de $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ deviennent donc, en n'écrivant que les termes du premier ordre en t,

$$(12) \quad \begin{cases} p = \Sigma p_\rho^0 u_\rho''^0 . t + \ldots, & \xi = \Sigma \xi_\rho^0 u_\rho''^0 . t + \ldots, \\ q = \Sigma q_\rho^0 u_\rho''^0 . t + \ldots, & \eta = \Sigma \eta_\rho^0 . u_\rho''^0 . t + \ldots, \\ r = \Sigma r_\rho^0 u_\rho''^0 . t + \ldots, & \zeta = \Sigma \zeta_\rho^0 . u_\rho''^0 . t + \ldots. \end{cases}$$

Le mouvement hélicoïdal instantané qui se produit d'abord a donc lieu sur une vis dont les coordonnées sont proportionnelles aux expressions

$$(13) \quad \Sigma p_\rho^0 u_\rho''^0, \quad \Sigma q_\rho^0 u_\rho''^0, \quad \Sigma r_\rho^0 u_\rho''^0, \quad \Sigma \xi_\rho^0 u_\rho''^0, \quad \Sigma \eta_\rho^0 u_\rho''^0, \quad \Sigma \zeta_\rho^0 u_\rho''^0.$$

Pour que cette vis coïncide avec celle qui porte le dyname appliqué, il faut et il suffit que l'on ait, λ désignant un coefficient de proportionnalité,

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Sigma p_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{A}, & \Sigma q_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{B}, & \Sigma r_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{C}, \\ \Sigma \xi_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{L}, & \Sigma \eta_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{M}, & \Sigma \zeta_\rho^0 u_\rho'^0 = \lambda \mathcal{N}. \end{array}\right.$$

Ainsi, les valeurs des $u_i'^0$ tirées des équations (9) doivent vérifier les relations (14).

Mais on peut remarquer qu'il suffit de connaître les $u_\rho'^0$ pour que les équations (14) fournissent $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, et l'on peut se débarrasser de ces inconnues. On trouve, en éliminant ces quantités entre les équations (9) et (14),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{i,\rho}^0 u_\rho'^0 = \frac{1}{\lambda}\Big\{\xi_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} p_\rho^0 u_\rho'^0 + \eta_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} q_\rho^0 u_\rho'^0 \\ \displaystyle\quad + \zeta_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} q_\rho^0 u_\rho'^0 + p_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \xi_\rho^0 u_\rho'^0 + q_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \eta_\rho^0 u_\rho'^0 + r_i^0 \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \zeta_\rho^0 u_\rho'^0 \Big\}, \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Posons

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,i} = p_i\xi_i + q_i\eta_i + r_i\zeta_i, \\ \mathcal{H}_{i,j} = p_i\xi_j + q_i\eta_j + r_i\zeta_j + p_j\xi_i + q_j\eta_i + r_j\zeta_i; \end{array}\right.$$

dans ces expressions on reconnaît les coefficients de la forme

$$(17)\quad 2H = \Sigma p_\rho u_\rho' . \Sigma \xi_\rho u_\rho' + \Sigma q_\rho u_\rho' . \Sigma \eta_\rho u_\rho' + \Sigma r_\rho u_\rho' . \Sigma \zeta_\rho u_\rho',$$

introduite au n° 82, page 231, formule (11).

Avec ces notations, l s équations (15) s'écrivent

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{i,\rho}^0 u_\rho'^0 = \frac{1}{\lambda}\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \mathcal{H}_{i,\rho}^0 u_\rho'^0, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right.$$

On est conduit à la réduction simultanée à des carrés des formes T et H.

Pour ne pas compliquer les notation, effaçons l'indice zéro devenu inutile, et remplaçons $u_\rho'^0$ par u_ρ'. Les équations (18) prennent la forme

$$(19)\quad \frac{\partial T}{\partial u_i'} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial u_i'}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ces équations sont les équations classiques que l'on rencontrerait

si l'on voulait, en regardant les u_i comme des constantes et les u'_i comme les seules variables, ramener simultanément T et H à des sommes de carrés, au moyen de substitutions linéaires effectuées sur les u'_i.

Ce problème conduit, par l'élimination des u'_i entre les équations linéaires (19), à une équation en λ du degré n et l'on obtiendra ainsi n systèmes de solutions pour les u'_i et par suite pour les u''_i.

Il y a donc n vis principales, en général.

Les cas d'exceptions sont ceux que l'on rencontre dans la discussion ordinaire des problèmes de ce genre, lorsque l'une des formes est définie et positive, comme c'est ici le cas pour T.

Remarques. Le lecteur ne manquera pas de se demander si, au lieu de se borner à une transformation linéaire sur les u'_i, les u_i étant regardés comme constants, on ne pourrait pas, par un changement effectué sur les paramètres u_i, amener du même coup les formes T et H à des sommes de carrés. Cela peut, en effet, avoir lieu, *mais exceptionnellement.*

Dans le cas d'un corps fixé par un point, les trois vis principales (la liberté du système est alors égale à 3) sont réduites aux trois axes principaux, *lesquels sont fixes dans le corps.* Il serait naturel de rechercher les cas où, plus généralement, les n vis principales sont fixes dans le corps.

Ce sont là autant de questions intéressantes que nous nous bornerons à proposer et qui sont, croyons-nous, entièrement nouvelles.

NOTE IX

Sur le cylindroïde.

Lieu des axes des complexes linéaires d'un faisceau.

Nous avons eu l'occasion de dire que la congruence linéaire commune à deux complexes linéaires C, C' appartient à une infinité de complexes formant un faisceau. Si $C = 0$, $C' = 0$ sont les équations de ces complexes en coordonnées de droite,

$$(1) \qquad \lambda C + \lambda' C' = 0$$

est l'équation générale des complexes du faisceau. Les axes de ces complexes engendrent une surface remarquable du troisième ordre appelée *cylindroïde* par M. Cayley.

Le complexe C est l'ensemble des droites de moment nul par un système de segments déterminé

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}.$$

Il faut toutefois observer que la multiplication du système par un nombre n'altère pas le rapport des quantités $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ et ne change pas le complexe. On pourrait donc réduire $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ à l'unité et réduire le système de segments à une vis. Il y a ainsi deux vis d'axes opposés, de même pas, attachées à un complexe. Appelons dès lors S_0 une de ces deux vis attachées au complexe C.

Appelons de même S'_0 une vis attachée au complexe C' [1].

Faisons choix d'un système d'axes rectangulaires dans lequel Oz sera la perpendiculaire commune aux axes des deux complexes C, C'.

---

[1] La notion de vis est à celle de complexe linéaire un peu ce qu'est la notion d'axe à celle de droite. Comme données, elles ne diffèrent que par une *question de sens* qui s'impose naturellement dès que l'on veut soumettre les figures au calcul. C'est cette précision qui rend utile la notion de vis.

Soit φ_0 l'angle que fait avec Ox la projection sur le plan xOy de l'axe de la vis S_0; h_0 le pas de cette vis; d_0 la cote du point de rencontre de l'axe avec Oz.

Considérée comme système de segments unitaire, la vis S_0 est représentée par un segment unitaire porté par son axe et par un couple de moment h_0 porté par le même axe. Les coordonnées de S_0 sont donc

$$(2) \quad \cos\varphi_0, \quad \sin\varphi_0, \quad 0, \quad h_0\cos\varphi_0 - d_0\sin\varphi_0, \quad h_0\sin\varphi_0 + d_0\cos\varphi_0, \quad 0.$$

En désignant par l'indice *prime* les quantités analogues relatives à S'_0, les coordonnées de cette seconde vis seront

$$(3) \quad \cos\varphi'_0, \quad \sin\varphi'_0, \quad 0, \quad h'_0\cos\varphi'_0 - d'_0\sin\varphi'_0, \quad h'_0\sin\varphi'_0 + d'_0\cos\varphi'_0, \quad 0.$$

Les six quantités (2) sont les coefficients de l'équation du complexe C, les six quantités (3) sont ceux du complexe C'.

Les coefficients de l'équation (1)

$$\lambda C + \lambda' C' = 0$$

seront donc

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda\cos\varphi_0 + \lambda'\cos\varphi'_0, \quad \lambda\sin\varphi_0 + \lambda'\sin\varphi'_0, \quad 0, \\ \lambda(h_0\cos\varphi_0 - d_0\sin\varphi_0) + \lambda'(h'_0\cos\varphi'_0 - d'_0\sin\varphi'_0), \\ \lambda(h_0\sin\varphi_0 + d_0\cos\varphi_0) + \lambda'(h'_0\sin\varphi'_0 + d'_0\cos\varphi'_0), \quad 0. \end{cases}$$

Lien entre la composition des systèmes de segments et les faisceaux de complexes linéaires.

Il est bon de faire remarquer ici que les formules précédentes traduisent la composition des deux systèmes de segments obtenus en multipliant par λ la vis S_0 et par λ' la vis S'_0. Si nous désignons par Σ le système de segments résultant, les six expressions (4) sont précisément les coordonnées de Σ et l'axe du complexe défini par l'équation (1) est l'axe central de ce système Σ.

Formules de composition.

Appelons S l'une des deux vis qui portent Σ; soient φ, h, d les quantités analogues à φ_0, h_0, d_0 qui concernent cette vis (il résulte, en effet, de la forme même des expressions (4), que l'axe de S coupe Oz à angle droit).

Le système Σ est le produit de S par un nombre μ, et l'on peut donner cette autre forme aux coordonnées de Σ :

$$(5) \quad \mu\cos\varphi, \quad \mu\sin\varphi, \quad 0, \quad \mu(h\cos\varphi - d\sin\varphi), \quad \mu(h\sin\varphi + d\cos\varphi), \quad 0.$$

En identifiant avec les expressions (4) on trouve

$$(6) \quad \begin{cases} \mu\cos\varphi = \lambda\cos\varphi_0 + \lambda'\cos\varphi'_0, \\ \mu\sin\varphi = \lambda\sin\varphi_0 + \lambda'\sin\varphi'_0, \\ \mu(h\cos\varphi - d\sin\varphi) = \lambda(h_0\cos\varphi_0 - d_0\sin\varphi_0) + \lambda'(h'_0\cos\varphi'_0 - d'_0\sin\varphi'_0), \\ \mu(h\sin\varphi + d\cos\varphi) = \lambda(h_0\sin\varphi_0 + d_0\cos\varphi_0) + \lambda'(h'_0\sin\varphi'_0 + d'_0\cos\varphi'_0). \end{cases}$$

Le cylindroïde.

Ces équations vont nous permettre de traiter diverses questions, et d'abord, de trouver le lieu des axes des complexes linéaires qui contiennent la congruence commune à C et à C'. Si on élimine entre elles λ, λ', μ, h et si l'on y remplace d par z, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on trouve, après un calcul facile,

$$(7) \qquad z(x^2+y^2)\sin(\varphi_0'-\varphi_0) + lx^2 - mny + ny^2 = 0,$$

en posant

$$(8) \quad \begin{cases} l = (h_0'-h_0)\sin\varphi_0\sin\varphi_0' + d_0'\cos\varphi_0'\sin\varphi_0 - d_0\cos\varphi_0\sin\varphi_0', \\ m = +(h_0'-h_0)\sin(\varphi_0'+\varphi_0) + (d_0'-d_0)\cos(\varphi_0'+\varphi), \\ n = (h_0'-h_0\cos\varphi_0\cos\varphi_0' - d_0'\sin\varphi_0'\cos_0\varphi + d_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0'. \end{cases}$$

Supposons que l'on fasse tourner les axes Ox, Oy d'un certain angle α autour de Oz; il faudra remplacer x, y par les variables X, Y telles que l'on ait

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Simplification de l'équation.

L'équation (7) prend la forme

$$z(X^2+Y^2)\sin(\varphi_0'-\varphi_0) + l_1X^2 - m_1XY + n_1Y^2$$

où

$$l_1 = l\cos^2\alpha - m\sin\alpha\cos\alpha + n\sin^2\alpha,$$
$$m_1 = -2l\sin\alpha\cos\alpha - m\cos 2\alpha - 2n\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$n_1 = l\sin^2\alpha + m\sin\alpha\cos\alpha + n\cos^2\alpha.$$

On peut choisir α de sorte que m_1 soit nul, il suffit de prendre

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{m}{l+n};$$

si même on fait abstraction d'une rotation de 90° autour de Oz, le problème n'admet qu'une solution. On observera de plus que

$$l_1 + n_1 = l + n.$$

Si l'on change z en $z+a$, ce qui revient à effectuer un simple changement d'origine sur Oz, l_1, n_1 s'augmentent de $a\sin(\varphi_0'-\varphi_0)$ et l_1+n_1 devient

$$l_1 + n_1 + 2a\sin(\varphi_0'-\varphi_0).$$

On peut choisir, et d'une seule façon, a de sorte que cette somme soit nulle.

On est ainsi ramené à la forme plus simple où l'on a $m = 0$, $l = -n$.

L'équation du cylindroïde s'écrit alors

$$(9) \qquad z(x^2 + y^2) = g(x^2 - y^2), \text{ en posant } g = \frac{n}{\sin(\varphi_0' - \varphi_0)}.$$

Propriétés diverses.

Sur cette forme simplifiée il est aisé de mettre en évidence les propriétés essentielles de la surface.

On voit que le lieu des axes des complexes d'un faisceau est une surface conoïde droite du troisième degré qui admet deux plans de symétrie.

Les axes sont compris entre deux plans parallèles normaux à la directrice, car z ne peut varier que de $-g$ à $+g$.

Par tout point de la directrice rectiligne il passe deux axes symétriques l'un de l'autre par rapport aux plans de symétrie.

On vérifiera que tout plan passant par une génératrice rectiligne coupe la surface, outre cette génératrice, suivant une ellipse. Cette ellipse se projette sur le plan directeur suivant un cercle passant par l'origine et dont le diamètre passant par l'origine est symétrique de la projection de la génératrice sur le même plan. Comme le cercle passe par la projection du point où le plan sécant touche la surface, on a tous les éléments nécessaires pour le construire.

Origine du nom.

On verra aussi que si l'on projette un point fixe quelconque sur les génératrices rectilignes de la surface, le lieu de ces projections est une section plane de la surface. Cette propriété appartient aussi aux cylindres, de là le nom de *cylindroïde* introduit par M. Cayley.

Expression du pas.

Revenons aux formules (6) et essayons de compléter les résultats précédents en cherchant l'expression du paramètre de la vis qui a pour axe une des génératrices du cylindroïde.

Si, au lieu d'éliminer λ, λ', μ, h entre les équations (6), nous éliminions λ, λ', μ, d, nous obtiendrions une équation analogue à celle qui lie d et φ. Mais il vaut mieux raisonner de la manière suivante.

Puisque dans le cas actuel on a $l + n = 0$, $m = 0$, les relations (8) qui définissent l, m, n en fonction de deux quelconques des vis S_0, S_0', qui ont leurs axes sur le cylindroïde, nous donnent

$$(10) \qquad \begin{cases} 0 = (h_0' - h_0)\cos(\varphi_0' - \varphi_0) - (d_0 + d_0')\sin(\varphi_0' - \varphi_0), \\ 0 = (h_0' - h_0)\sin(\varphi_0' - \varphi_0) + (d_0' - d_0)\cos(\varphi_0' + \varphi_0), \end{cases}$$

qui doivent avoir lieu entre les éléments de deux quelconques des vis du cylindroïde (c'est-à-dire dont les axes sont sur le cylindroïde).

On a posé

$$g = \frac{n}{\sin(\varphi'_0 - \varphi_0)}.$$

Il faut donc joindre à ces équations la suivante :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} 2n = n - l = 2g \sin(\varphi'_0 - \varphi_0) = &+ (h'_0 - h_0)\cos(\varphi'_0 + \varphi_0) \\ &- (d'_0 - d_0)\sin(\varphi'_0 + \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Appliquons ces équations à diverses vis du cylindroïde. Prenons une génératrice quelconque correspondant à l'angle φ et celle qui correspond à $\varphi_0 = 0$. Faisons donc $\varphi'_0 = \varphi$, $\varphi_0 = 0$; les équations (10) et (11) donneront, en mettant h et d au lieu de h'_0, d'_0,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &(h - h_0)\cos\varphi - (d + d_0)\sin\varphi = 0, \\ &(h - h_0)\sin\varphi + (d - d_0)\cos\varphi = 0, \\ &2g\sin\varphi = + (h - h_0)\cos\varphi - (d - d_0)\sin\varphi. \end{aligned} \right.$$

La dernière équation n'est compatible avec la première que si $d_0 = g$ et alors elle se confond avec elle.

Formules définitives. Les deux premières donnent alors, en remplaçant d_0 par g,

$$(13) \qquad d = g\cos 2\varphi,$$

équation qui s'accorde avec celle du cylindroïde et ensuite

$$(14) \qquad h = h_0 + g\sin 2\varphi.$$

Le problème de la détermination de la vis S se trouve ainsi complètement résolu.

Si l'on prend $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on obtient les valeurs $d = \pm g$, en sorte que les axes correspondants sont les axes limites, c'est-à-dire ceux qui limitent sur Oz le segment qui contient les pieds de tous les autres axes. Dans les deux cas h est égal à h_0, c'est-à-dire que les deux vis extrêmes ont le même pas. On observera que leurs axes étant parallèles à Ox, Oy respectivement sont rectangulaires.

Il y a là un fait général : *pour que deux vis du cylindroïde aient même pas, il faut et il suffit que la somme des inclinaisons de leurs axes soit égale à* $\frac{\pi}{2}$, ou encore que *l'un des axes soit la symétrique de l'axe rectangulaire avec l'autre axe.*

Représentation du pas. La quantité $h - h_0$ est susceptible d'une représentation simple. Soit Δ l'axe de la vis S; coupons-le par la sphère de rayon g qui a pour centre l'origine.

La formule

(15) $$(h - h_0)^2 + d^2 = g^2,$$

déduite de (13) et de (14), prouve que $h - h_0$ *est la demi-corde déterminée par la sphère en question sur l'axe* Δ.

Remarque importante.

Il est bon de faire ici une observation importante. La constante h_0 n'intervient pas dans la définition du cylindroïde qui ne contient d'autre paramètre que g, en sorte que, comme les paraboles, les cylindroïdes sont tous semblables entre eux.

Mais, quand nous parlerons du cylindroïde, nous sous-entendrons que *l'on adjoint à la surface un certain paramètre* h_0, *qui est la valeur du pas des deux vis extrêmes.*

Proposition générale.

Ceci posé, observons que si l'on compose deux systèmes de segments portés par deux vis appartenant au cylindroïde (g, h_0), le système résultant est porté par une vis dont l'axe appartient au même cylindroïde. De même, si au lieu de composer deux systèmes on en compose un plus grand nombre dont les vis appartiennent au même cylindroïde. Leur segment résultant s'obtient en multipliant une certaine vis du cylindroïde par la longueur de la résultante de translation.

Comme, d'autre part, il n'y a sur le cylindroïde aucune vis dont le pas soit infini (formule 14), on peut en conclure le théorème général suivant :

Si plusieurs systèmes de segments portés par des vis appartenant à un même cylindroïde (g, h_0) *donnent lieu à une résultante générale de translation nulle, cela suffit pour que les systèmes considérés se détruisent entre eux;* s'il s'agit de forces, ces forces se feront équilibre.

Ce théorème donne la clef du rôle du cylindroïde dans la composition des systèmes de segments.

Remarque sur la nature de la congruence commune aux complexes du faisceau.

Nous venons de voir que les axes des complexes d'un faisceau engendrent un cylindroïde. Nous laissons au lecteur le soin d'établir les cas de dégénérescence.

Si h_0 est moindre que g en valeur absolue, il y a deux valeurs de φ qui annulent h; la congruence linéaire admet alors deux directrices réelles. Elles sont imaginaires dans le cas contraire.

Indifférence de certaines singularités.

Si $h_0 = \pm g$, les deux directrices se confondent; mais cela ne modifie en rien *la surface elle-même*, puisque ces singularités ne visent que des valeurs spéciales du paramètre h_0. C'est là un fait curieux et qui méritait d'être signalé.

NOTE X

Sur la composition des rotations et sur les quaternions.

Opérations géométriques et opérations algébriques.

Dès les premières pages de ce livre on a pu voir comment, après avoir défini l'addition géométrique des segments et, en particulier, des segments portés par une même droite, on a établi un parallèle entre l'opération géométrique ainsi définie et l'addition algébrique ordinaire. Ce fait n'est pas isolé. Les quaternions en offrent un nouvel exemple. Il est certaines opérations géométriques concrètes qui rentrent dans les données ordinaires de la géométrie et qui, prises dans leur ensemble, donnent lieu à un symbolisme analytique nouveau dans lequel chaque opération de calcul est l'image d'une certaine opération géométrique. Parmi les opérations géométriques visées, certaines se rattachent étroitement à la théorie de la rotation des corps, et telle est l'origine d'une similitude entre les formules de la multiplication des quaternions et les formules qui fournissent la composition des rotations par le moyen des paramètres d'Olinde Rodrigues. La théorie des quaternions se relie ainsi à celle des rotations, et c'est cet ordre d'idées que nous allons développer, sans insister, du reste, sur les applications des quaternions, car ce sujet échappe au cadre restreint de la présente note.

Nous allons d'abord donner la définition de ces opérations géométriques destinées à servir de substratum à la forme analytique du calcul des quaternions.

Nous nous attacherons donc à rester toujours et systématiquement sur le terrain géométrique, en réservant pour la fin l'introduction des nouveaux éléments de calcul. Notre exposition y gagnera en clarté et en rigueur puisque nous n'aurons jamais affaire dans ces préliminaires qu'à des éléments concrets.

Soient $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ deux segments; pour passer de l'un des seg-

ments $\overline{OA}$ à l'autre $\overline{OB}$, on peut : 1° faire tourner $\overline{OA}$, dans le sens direct autour d'un axe $O\lambda$ perpendiculaire au plan AOB et dextrorsum avec le segment $\overline{AB}$; 2° multiplier, après rotation, le segment $\overline{OA}$ par un nombre T égal au rapport des longueurs de $\overline{OB}$ et

Bi-radiale. de $\overline{OA}$. On définit ainsi un certain *opérateur* géométrique qui a reçu le nom de *bi-radiale*. On désigne la bi-radiale par la notation $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$.

Le segment $\overline{OB}$ est le *segment numérateur* et $\overline{OA}$ le *segment dénominateur* de la bi-radiale.

On regarde quelquefois la bi-radiale comme l'expression du quotient des vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$. C'est là une affaire de mot.

La dénomination peut se justifier en disant que le quotient de deux nombres b et a est le nombre (l'opérateur) par lequel il faut multiplier a pour reproduire b. De même ici l'opérateur $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ appliqué au segment $\overline{OA}$ reproduit le segment $\overline{OB}$.

Tenseur. Il entre dans la définition de la bi-radiale un axe $O\lambda$, une amplitude angulaire θ, celle dont $\overline{OA}$ doit tourner autour de $O\lambda$ pour coïncider avec $\overline{OB}$, et un nombre $T = \frac{\text{longueur de } \overline{OB}}{\text{longueur de } \overline{OA}}$, qui a reçu le nom de *tenseur* de la bi-radiale. Soit en tout 4 paramètres.

Si l'on fait tourner tout d'une pièce l'angle $\widehat{AOB}$ dans son plan autour de O; si l'on multiplie, en outre, les deux segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ par un même nombre positif ou négatif, la bi-radiale n'est évidemment pas changée. Nous rappelons ici que multiplier un segment par un nombre algébrique n, c'est multiplier la longueur de ce segment par la valeur absolue de n, en conservant ou renversant le sens du segment selon que n est positif ou négatif.

Verseur. Lorsque le tenseur est égal à l'unité, la bi-radiale se réduit à une rotation autour de $O\lambda$, elle reçoit alors le nom de *verseur*. Ainsi un verseur (de *vertere*, tourner) représente une simple rotation, c'est une bi-radiale dont les deux segments ont la même longueur.

Si l'on multiplie le segment numérateur d'une bi-radiale par un nombre positif, auquel cas nous dirons que la bi-radiale a été multipliée elle-même par ce nombre, il est clair que le tenseur de la bi-radiale se trouve multiplié par ce nombre, mais que ni l'axe $O\lambda$, ni l'amplitude θ de la rotation ne sont changés. Il résulte de là que que toute bi-radiale peut être regardée comme le produit d'un cer-

tain verseur (qui a même axe et même amplitude angulaire qu'elle) par un nombre positif égal à son tenseur.

Le verseur en question s'appelle le verseur de la bi-radiale. Le verseur et le tenseur d'une bi-radiale R se désignent ordinairement par les notations

$$\mathfrak{U}\mathrm{R},\ \mathfrak{T}\mathrm{R}.$$

Bi-radiales conjuguées. Deux bi-radiales qui ont le même tenseur, la même amplitude angulaire, mais dont les sens des axes sont opposés, sont dites *conjuguées*.

Inverses. Deux bi-radiales qui ont leurs tenseurs inverses l'un de l'autre, leurs axes opposés avec la même amplitude angulaire sont dites *inverses* l'une de l'autre.

Nous avons défini plus haut la multiplication d'une bi-radiale par un nombre positif, nous pouvons définir de même sa multiplication par un nombre négatif en disant que c'est la bi-radiale obtenue en multipliant le numérateur $\overline{\mathrm{OB}}$ par ce nombre négatif, ce qui comporte, comme on sait, un changement de sens du segment.

La bi-radiale qui, d'après cette définition, résulte de la multiplication de la bi-radiale $\left(\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)$ par -1, s'obtiendra en changeant

Opposées. le sens de $\overline{\mathrm{OB}}$. Comme en changeant à la fois le sens de $\overline{\mathrm{OA}}$ et de $\overline{\mathrm{OB}}$ la bi-radiale ne change pas, il revient au même de changer le sens de $\overline{\mathrm{OB}}$ seul ou de $\overline{\mathrm{OA}}$ seul.

La bi-radiale ainsi obtenue sera dite l'*opposée* de la première.

On constatera aisément que les axes de deux bi-radiales opposées sont opposés, leurs angles sont complémentaires et leurs tenseurs égaux.

Parmi les bi-radiales il est quelques cas particuliers qu'il importe de signaler.

Bi-radiale scalaire. Il y a d'abord le cas où les segments $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ sont portés par une même droite. On passe alors de $\overline{\mathrm{OA}}$ à $\overline{\mathrm{OB}}$ par simple multiplication par un nombre positif ou négatif selon que $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ ont ou n'ont pas le même sens. La bi-radiale s'appellera, dans ce cas, *scalaire;* elle est entièrement définie par le nombre positif ou négatif dont il vient d'être question.

Si $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ sont coïncidents, nous dirons que la bi-radiale se réduit à l'unité et nous la désignerons par la notation 1 ; si $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ sont égaux et opposés, nous représenterons de même la bi-radiale par -1.

Bi-radiale rectangle.

Un autre cas important est celui des *bi-radiales rectangles* pour lesquelles l'amplitude angulaire est égale à 90°.

Si le tenseur est, en outre, égal à l'unité, on obtient ce que l'on appelle un *verseur rectangle*. La considération des verseurs rectangles est la clef de la présente théorie.

Après ces définitions nous allons passer à l'étude des deux constructions fondamentales de la théorie des biradiales, l'addition et la multiplication. Au lieu de ces mots qui évoquent à tort l'idée de calcul, à tort puisqu'il ne s'agit que de constructions, on pourrait se servir plus heureusement des mots *composition* et *juxtaposition* qui correspondent mieux aux constructions effectuées. Mais la terminologie des quaternions est déjà assez compliquée, nous parlerons donc d'addition et de multiplication en nous souvenant qu'il s'agit d'opérations constructives et nullement de calcul.

Réduction au même dénominateur.

Observons d'abord que, par application d'une remarque déjà faite, deux bi-radiales étant données, on pourra toujours les amener à avoir le même dénominateur.

Soit, en effet, $O\mu$ la droite d'intersection du plan des deux bi-radiales, ou une droite de leur plan commun si elles sont complanaires, $\left[\text{le plan AOB est le } \textit{plan} \text{ de la bi-radiale } \left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)\right]$. Par rotation de chacune dans son propre plan, on pourra amener sur $O\mu$ le segment dénominateur de chacune d'elles, et alors en multipliant par un même nombre les deux segments de l'une d'elles, on arrivera à rendre identiques les deux segments dénominateurs.

Addition des bi-radiales.

Nous sommes actuellement à même de définir l'addition des bi-radiales.

Considérons deux bi-radiales que nous pouvons supposer réduites au même dénominateur et représentées par les notations $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$, où $\overline{OA}$ est le segment dénominateur commun et $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ les deux numérateurs.

Soit $\overline{OD}$ le segment qui est la somme géométrique des segments $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}\right)$ sera, par définition, la somme des deux bi-radiales proposées. La définition est, comme on voit, tout à fait analogue à celle de l'addition des fractions.

Ajoutons que, d'après la définition même, l'addition de deux bi-radiales est une opération commutative.

Décomposition de toute bi-radiale en une bi-radiale scalaire et une bi-radiale rectangle.

L'addition va nous conduire à une décomposition importante de toute bi-radiale en une somme de deux autres; nous allons, en effet, démontrer que : *toute bi-radiale est la somme d'une bi-radiale scalaire et d'une bi-radiale rectangle.*

Soit, en effet, $\overline{OB'}$ le segment qui est la projection de $\overline{OB}$ sur la droite OA et $\overline{OB''}$ la projection de $\overline{OB}$ sur la perpendiculaire élevée en O à OA dans le plan AOB (plan de la bi-radiale). On peut regarder $\overline{OB}$ comme la somme géométrique des segments $\overline{OB'}$ et $\overline{OB''}$ et, dès lors, la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ sera la somme géométrique des deux bi-radiales $\left(\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OB''}}{\overline{OA}}\right)$. La première bi-radiale est purement scalaire, la seconde est rectangle. Le théorème est donc démontré.

La première bi-radiale a reçu le nom de partie scalaire ou simplement de scalaire de la bi-radiale proposée, tandis que la seconde, la bi-radiale rectangle, a reçu le nom de *vecteur* ou de partie *vectorielle.*

Représentation par un vecteur d'une bi-radiale rectangle.

La raison en est que *toute bi-radiale rectangle est représentable par un vecteur.*

Soit, en effet, $O\lambda$ l'axe d'une bi-radiale rectangle; portons sur cet axe une longueur proportionnelle au *tenseur* de la bi-radiale. Nous obtenons de la sorte un segment $\overline{Ov}$ qui représente à lui seul tous les éléments capables de définir la bi-radiale rectangle, à savoir son axe, qui a le sens de $\overline{Ov}$ et son tenseur, qui est mesuré par la longueur de $\overline{Ov}$.

Remarque.

C'est donc à juste raison qu'on a pu dire qu'*une bi-radiale est constituée par une quantité numérique* (la partie scalaire) *et par un segment* (le vecteur).

Autre définition de l'addition de deux bi-radiales.

Nous allons déduire de là une nouvelle définition de l'addition des bi-radiales.

Considérons deux bi-radiales qui ont le même dénominateur $\overline{OA}$ et dont $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ seront les numérateurs; soit $\overline{OD}$ la somme géométrique de $\overline{OB}$ et de $\overline{OC}$ et $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD'}$ les projections sur la droite OA des segments $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$; il est clair que $\left(\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}}\right)$ représentent les parties scalaires des bi-radiales

$\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right), \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right), \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}\right)$. Mais $\overline{OD'}$ est évidemment la somme des vecteurs $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$; donc on a ce théorème :

La partie scalaire de la somme de deux bi-radiales est la somme des parties scalaires de chaque bi-radiale. Le calcul de cette partie se ramène à l'addition algébrique.

Considérons maintenant les *vecteurs* de chaque bi-radiale. Je dis que le vecteur de la somme est la somme géométrique de ces deux vecteurs.

Considérons, en effet, le plan ω qui est normal à $\overline{OA}$ au point O; soient $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD'}$ les projections des segments $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ sur le plan ω. $\overline{OD'}$ est évidemment la somme géométrique des segments $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$. De là résulte que la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}}\right)$, partie rectangle de la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}\right)$, est la somme des deux autres $\left(\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA}}\right)$, parties rectangles des bi-radiales $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$. Ou encore :

La bi-radiale rectangle de la somme de deux bi-radiales est la somme des deux bi-radiales rectangles de chacune d'elles.

On peut en conclure que le *vecteur de la somme de deux bi-radiales est la* SOMME GÉOMÉTRIQUE *des vecteurs de chacune d'elles.*

Soient, en effet, sur les droites OB', OC', OD' les vecteurs $\overline{Ob_1}$, $\overline{Oc_1}$, $\overline{Od_1}$ obtenus en divisant $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD'}$ par le nombre qui mesure la longueur de $\overline{OA}$; il est clair que $\overline{Od_1}$ sera encore la somme géométrique de $\overline{Ob_1}$ et de $\overline{Oc_1}$. Or, faisons tourner de 90° autour de OA, dans le sens direct, ces trois segments, ils viendront dans les positions $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$, $\overline{Od}$; ce dernier étant toujours la somme géométrique des deux premiers.

Du reste, dans cette position, ces trois segments sont précisément les trois vecteurs représentatifs des trois bi-radiales rectangles $\left(\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}\right), \left(\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA}}\right), \left(\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}}\right)$.

La proposition est donc démontrée.

Réduction de l'addition des bi-radiales à celle des nombres et à celle des segments.

En résumé : *Pour avoir la partie scalaire et le vecteur de la somme de deux bi-radiales, il suffit de faire la somme algébrique des deux parties scalaires et la somme géométrique des deux vecteurs de chacune de ces bi-radiales.*

L'addition de ces bi-radiales se présente ainsi comme une opération complexe où l'addition algébrique marche à côté de l'addition géométrique.

Commutativité générale de l'addition des bi-radiales.

Chacune de ces opérations est commutative *quel que soit le nombre* des éléments à additionner. Il en résulte dès lors que : *l'addition successive des bi-radiales en nombre quelconque est une opération indépendante de l'ordre de succession.*

L'addition des bi-radiales étant commutative, quel que soit le nombre des éléments à additionner, on peut en conclure qu'elle est aussi associative et que l'on peut, dans l'opération, remplacer plusieurs des éléments par leur somme effectuée.

Bi-radiale nulle.

Si l'on ajoute à une bi-radiale son opposée, c'est-à-dire celle que l'on obtient en échangeant le sens du segment numérateur, on obtient comme somme une bi-radiale dont le numérateur est un segment nul. Nous dirons d'une telle bi-radiale qu'elle est nulle. La partie scalaire et le vecteur d'une bi-radiale nulle sont nuls. Il en est de même du tenseur.

Soustraction des bi-radiales.

On définit la *soustraction* d'une bi-radiale comme l'addition de son opposée.

D'après cela, si l'on adopte le signe + pour indiquer l'addition des bi-radiales, l'addition de la bi-radiale opposée à $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ s'écrira.

$$+ (-1) \left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right),$$

car nous savons que l'opposée d'une bi-radiale résulte de sa multiplication par -1. Alors, au lieu d'écrire $+(-1)$, on peut écrire simplement $-$ et ce signe désignera la soustraction de la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$.

Décomposition de toute bi-radiale rectangle en trois autres d'orientations données.

L'addition des bi-radiales nous a déjà conduit à la décomposition de toute bi-radiale en une bi-radiale scalaire et en une bi-radiale rectangle. Nous allons poursuivre dans ce sens en montrant que *toute bi-radiale rectangle est la somme de trois bi-radiales rectangles dont les axes ont des directions données à l'avance non parallèles à un même plan.*

En effet, considérons le vecteur $\overline{Ov}$ qui représente la bi-radiale rectangle R et Ox, Oy, Oz les trois directions données à l'avance. On peut décomposer $\overline{Ov}$ suivant ces trois directions en trois vecteurs $\overline{Ov_x}$, $\overline{Ov_y}$, $\overline{Ov_z}$. Ces vecteurs représentent chacun une bi-radiale rectangle, en sorte que nous avons trois bi-radiales rectangles R_x,

R_y, R_z dont les axes ont la direction de Ox, Oy, Oz ou la direction opposée. Comme, du reste, $\overline{Ov_x}$, $\overline{Ov_y}$, $\overline{Ov_z}$ ont $\overline{Ov}$ pour somme géométrique, la bi-radiale R est elle-même la somme de R_x, R_y, R_z et ce que nous *rappellerons* par la notation conventionnelle

$$R = R_x + R_y + R_z.$$

Notons maintenant que si l'on désigne par r_x, r_y, r_z les verseurs rectangles dont Ox, Oy, Oz sont les axes, R_x est le produit de r_x par un nombre X qui est positif ou négatif selon que l'axe de R_x a le sens de Ox ou le sens opposé; et de même pour R_y, R_z, en sorte qu'on peut poser, pour *rappeler* cela,

$$R_x = X.r_x, \quad R_y = Y.r_y, \quad R_z = Z.r_z,$$

ce qui permet d'écrire

$$R = X.r_x + Y.r_y + Z.r_z.$$

La signification des nombres algébriques X, Y, Z est évidente, ce sont ceux qui mesurent sur Ox, Oy, Oz les projections $\overline{Ov_x}$, $\overline{Ov_y}$, $\overline{Ov_z}$ du segment $\overline{Ov}$, ce sont les coordonnées du point v.

Si maintenant nous nous rappelons que toute bi-radiale est la somme d'une bi-radiale scalaire et d'une bi-radiale rectangle, en désignant par S la quantité numérique qui définit, comme on l'a expliqué, la partie scalaire, et enfin en appliquant la décomposition générale précédente à la partie rectangle, on arrive à ce résultat :

Toute bi-radiale est la somme d'une bi-radiale scalaire, définie par une quantité numérique S, *et de trois bi-radiales rectangles obtenues en multipliant respectivement par trois nombres* X, Y, Z *trois verseurs rectangles donnés, dont les axes ne sont pas parallèles à un même plan.*

En désignant par R la bi-radiale on pourra *rappeler* ce résultat en écrivant

$$R = S + X.r_x + Y.r_y + Z.r_z.$$

Nous supposerons habituellement dans ce qui va suivre que les axes Ox, Oy, Oz sont ceux d'un trièdre rectangle direct.

Expression des résultats précédents par les moyens ordinaires de la géométrie analytique.

Pour donner plus de corps au résultat précédent, il ne sera pas inutile de lui donner la forme analytique par le moyen de la géométrie analytique ordinaire.

Soient x, y, z les coordonnées du point A; x', y', z' celles du point B. Proposons-nous de calculer les nombres S, X, Y, Z pour la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$.

D'abord on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{\text{long}\,\overline{OB}}{\text{long}\,\overline{OA}} \cos \widehat{AOB} \\ &= \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\ &= \frac{xx' + yy' + zz'}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer X, Y, Z, observons d'abord que le vecteur $\overline{Ov}$ est normal au plan $\widehat{AOB}$, et dextrorsum avec $\overline{AB}$. Si donc on pose $G = \sqrt{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2}$, on a pour les cosinus directeurs de $\overline{Ov}$ les expressions suivantes :

$$\frac{yz' - zy'}{G}, \quad \frac{zx' - xz'}{G}, \quad \frac{xy' - yx'}{G};$$

la longueur de $\overline{Ov}$ est, du reste, égale à

$$(2)\qquad \frac{\text{long}\,\overline{OB}}{\text{long}\,\overline{OA}} \sin \widehat{AOB} = \frac{G}{x^2 + y^2 + z^2},$$

il vient donc pour X, Y, Z :

$$(3)\quad X = \frac{yz' - zy'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Y = \frac{zx' - xz'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Z = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Les nombres S, X, Y, Z se trouvent ainsi calculés. Si T est le tenseur et θ l'amplitude angulaire, les équations (1) et (2) s'écriront

$$(4)\qquad S = T \cos\theta, \quad \frac{G}{x^2 + y^2 + z^2} = T \sin\theta,$$

mais on a aussi

$$(5)\qquad \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{G}{x^2 + y^2 + z^2},$$

en sorte qu'on peut écrire

$$(6)\qquad S = T\cos\theta, \quad \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = T \sin\theta,$$

d'où

$$(7)\qquad T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + S^2}.$$

On observera ici encore que les données constructives d'une bi-radiale dépendent des 4 paramètres X, Y, Z, S.

Nous allons maintenant définir la multiplication des bi-radiales.

Multiplication des bi-radiales.

On a défini dès le début une bi-radiale R comme un opérateur géométrique qui transforme un segment $\overline{OA}$ en un segment $\overline{OB}$. Imaginons maintenant qu'on applique à ce segment $\overline{OB}$ une seconde bi-radiale R′ qui transforme $\overline{OB}$ en un troisième segment $\overline{OC}$. On pourrait passer de $\overline{OA}$ à $\overline{OC}$ au moyen d'une bi-radiale R″ qui aurait ainsi le même effet que l'application successive des opérations représentées par les bi-radiales R, R′. Il est assez naturel de dire que R″ est le produit de la bi-radiale R par la bi-radiale R′ et d'adopter la notation

$$R'' = R'.R$$

qui s'énonce R′ *qui multiplie* R.

La bi-radiale R est le *multiplicande,* R′ le *multiplicateur;* il est placé à gauche et non à droite du multiplicande dans la notation ci-dessus.

Ordre des facteurs.

Cette remarque a son prix car, dans la multiplication ainsi définie, l'ordre des facteurs n'est pas indifférent; cette opération n'est pas commutative.

Étant données deux bi-radiales R, R′, on voit que pour effectuer le produit de R par R′ il faudra, par rotation de chaque couple de segments dans son plan et par multiplication par un même nombre des deux segments d'un même couple, amener le numérateur de R à coïncider avec le dénominateur de R′.

Ces deux bi-radiales se trouveront alors représentées par des notations telles que $\left(\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ pour R et $\left(\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$ pour R′.

Alors le produit R″ = R′. R est la bi-radiale $\left(\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$.

Tenseur du produit égal au produit des tenseurs.

L'identité numérique

$$\frac{\text{long } \overline{OC}}{\text{long } \overline{OA}} = \frac{\text{long } \overline{OC}}{\text{long } \overline{OB}} \times \frac{\text{long } \overline{OB}}{\text{long } \overline{OA}}$$

prouve que *le tenseur du produit* R″ *de deux bi-radiales* R, R′ *est égal au produit des tenseurs de ces deux bi-radiales.*

Verseur du produit.

Prenons maintenant les verseurs $\mathfrak{U}$R, $\mathfrak{U}$R′, $\mathfrak{U}$R″. Le lecteur verra bien facilement, d'après la définition même de la multiplication, que la bi-radiale $\mathfrak{U}$R″ est le produit de $\mathfrak{U}$R par $\mathfrak{U}$R′,

$$\mathfrak{U}R'' = \mathfrak{U}R'.\mathfrak{U}R.$$

Le verseur du produit de la bi-radiale R *par la bi-radiale* R′ *est égal au produit du verseur de* R *par le verseur de* R′.

Addition géométrique des arcs de grands cercles.

Or, nous allons constater que le produit de deux verseurs se ramène à l'*addition géométrique des segments d'arcs de grands cercles sur la sphère.*

Soient, en effet, $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$, $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}\right)$ deux verseurs U, U′. On peut supposer que la longueur commune des segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ est l'unité.

Soient Oλ, Oλ' les axes de ces deux verseurs, θ, θ' leurs amplitudes angulaires; désignons de même par Oλ'', θ'' l'axe et l'amplitude angulaire du verseur $U'' = \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right) = U'.U$.

Par l'effet du verseur U, le point A décrit un arc $\overline{AB}$ de grand cercle dont Oλ est l'axe et dont θ est l'arc au centre; par l'effet du verseur U′, ensuite appliqué, le point A part de B pour décrire un arc de grand cercle $\overline{BC}$ dont Oλ' est l'axe et θ' l'angle au centre. Or, par l'effet du seul verseur U″ le point A viendrait directement en C et décrirait l'arc de grand cercle $\overline{AC}$, *somme géométrique* des arcs $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, qui a Oλ'' pour axe et θ'' pour angle au centre.

Prolongeons l'arc $\overline{BC}$ dans le sens CB, opposé à BC, d'une longueur BC_1 égale à BC. De même, prolongeons $\overline{AB}$ d'une quantité BA_1 égale à BA, et en sens inverse de BA.

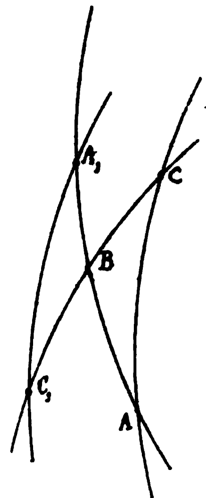


Fig. 93.

Le triangle sphérique C_1BA_1 résulte du triangle CAB par une rotation de 180° autour du diamètre de la sphère qui aboutit en B. Les verseurs $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ et $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}\right)$ sont représentables aussi par $\left(\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB}}\right)$ et $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OC_1}}\right)$.

On voit ainsi que $\left(\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OC_1}}\right)$ représente le produit de U′ par U,

$$U''' = U.U',$$

alors que $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$ représente le produit U″ de U par U′, $U'' = U'.U$.

La multiplication n'est pas commutative.

Pour que U' et U''' pussent coïncider, il faudrait que les points A, C, A_1, C_1 fussent sur un même grand cercle, qui devrait aussi contenir le point B. Les points A, B, C étant sur un même arc de grand cercle, les deux verseurs seraient coplanaires.

La multiplication des verseurs coplanaires est, en effet, commutative, car elle se ramène à l'addition d'arcs d'un même grand cercle. Mais, en dehors de ce cas, la commutativité n'existe pas. Ainsi la multiplication des verseurs, et partant celle des bi-radiales, n'est généralement pas commutative.

Associativité.

Malgré que la commutabilité n'existe pas pour la multiplication des bi-radiales, l'associativité est maintenue. En effet, il saute aux yeux que pour effectuer le produit de R par R', puis du résultat ainsi obtenu par R'' ..., on pourra effectuer à part le produit des verseurs et puis le produit des tenseurs. Le produit des verseurs se traduira par une addition géométrique d'arcs de grands cercles; or, cette addition est évidemment associative, en ce sens que l'on peut substituer à plusieurs arcs consécutifs leur somme effectuée. Le produit des tenseurs est purement numérique.

On en conclut donc que *dans un produit de bi-radiales il sera permis de substituer à plusieurs bi-radiales consécutives leur produit effectué.*

Produit de deux bi-radiales conjuguées.

Deux bi-radiales coplanaires, qui ont le même tenseur, la même amplitude angulaire, mais dont les axes sont opposés, ont été dites conjuguées.

Le produit de deux bi-radiales conjuguées se réduit à une bi-radiale scalaire dont le tenseur est le carré de leur tenseur commun.

Produit de deux bi-radiales inverses.

Bi-radiale unité.

Si deux bi-radiales ont des tenseurs inverses l'un de l'autre, si leurs amplitudes angulaires sont égales et leurs axes opposés, on obtient deux bi-radiales que nous avons appelées inverses l'une de l'autre. Si l'on applique successivement à un segment une bi-radiale inverse, on reproduit le segment lui-même. C'est ce que l'on exprime en disant que le produit de deux bi-radiales inverses l'une de l'autre représente une bi-radiale unité.

Considérons la figure (93) qui nous a servi à mettre en évidence la non-commutativité de la multiplication des bi-radiales.

Formule relative au produit des conjuguées de deux bi-radiales.

Les arcs $\overline{AB}$ et $\overline{BA_1}$ représentent le même verseur U, $\overline{BC}$ et $\overline{C_1B}$ représentent le verseur U' ; l'arc $\overline{AC}$ représente le verseur $U'' = U' . U$, tandis que $\overline{C_1A_1}$ représente le verseur $U''' = U . U'$. $\overline{A_1C_1}$ représente donc le conjugué de U''', que nous désignerons par KU'''; or, $\overline{A_1C_1}$ est la somme géométrique de $\overline{A_1B}$ et de $\overline{BC_1}$ qui représentent respective

ment les verseurs KU, KU' conjugués de U, U'. On voit donc qu'il est permis d'écrire

$$KU''' = KU'.KU.$$

En repassant aux bi-radiales R, R' et désignant par KR, KR' leurs conjuguées, on voit que l'on a

$$K(R.R') = KR'.KR,$$

formule qui joue un certain rôle dans les applications. On observera dans cette formule l'échange qui s'y produit dans l'ordre de R, R'.

Multiplication de deux verseurs rectangles à axes rectangulaires.

Les multiplications des verseurs rectangulaires dont les axes sont à angle droit méritent une mention spéciale pour le rôle qu'elles sont appelées à jouer par la suite.

Reprenons les trois verseurs rectangles r_x, r_y, r_z dont les axes Ox, Oy, Oz forment un trièdre tri-rectangle direct. On constatera aisément par l'application attentive de la règle de multiplication que l'on a les relations

$$r_y r_z = r_x, \qquad r_z r_x = r_y, \qquad r_x r_y = r_z$$
$$r_y r_z = -r_x, \qquad r_x r_z = -r_y, \qquad r_y r_x = -r_z.$$

On désigne par $-r_x$, $-r_y$, $-r_z$ le produit de r_x, r_y, r_z par -1, conformément à ce qui a été expliqué plus haut.

Puissances de bi-radiales.

L'application réitérée d'une même bi-radiale, ou sa multiplication par elle-même, conduit aux puissances de bi-radiales. La puissance $m^{\text{ième}}$ d'une bi-radiale est une bi-radiale qui a le même axe en position et direction et dont l'angle est égal à $m\theta$ et le tenseur à la puissance $m^{\text{ième}}$ du tenseur de la bi-radiale. On reconnaît là une généralisation de la formule de Moivre.

Il serait aisé de tirer de là une définition de la puissance $m^{\text{ième}}$ pour une valeur algébrique réelle quelconque de m.

Puissances d'un verseur rectangle.

Si l'on multiplie par lui-même un verseur rectangle, on obtient un verseur dont l'angle est égal à 180° et qui équivaut, appliqué à un segment, à un simple changement de signe, c'est-à-dire à une multiplication par -1 ; nous pourrons donc écrire, si r est le verseur rectangle considéré,

$$r^2 = -1 ;$$

c'est ainsi que l'on a

$$r_x^2 = -1, \quad r_y^2 = -1, \quad r_z^2 = -1.$$

Telle est la signification de ces diverses notations symboliques.

Il nous sera très utile de traduire les résultats précédents dans le langage de la géométrie analytique.

Représentation par les formules ordinaires de la géométrie analytique.

Soient les deux bi-radiales

$$R = \left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right), \qquad R' = \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}\right);$$

désignons par x, y, z les coordonnées de A; x', y', z' celle de B; x'', y'', z'' celles de C; S, X, Y, Z les paramètres de R; S', X', Y', Z' ceux de R' et enfin S'', X'', Y'', Z'' ceux de la bi-radiale

$$R'' = R'.R = \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right).$$

Nous allons voir que ces derniers s'expriment très simplement à l'aide de ceux de R et de R'.

D'abord les formules (1) et (3), appliquées aux bi-radiales R, R', R'', donnent

$$(8)\quad \begin{cases} S = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{x^2 + y^2 + z^2}, & X = \dfrac{yz' - zy'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Y = \dfrac{zx' + xz'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Z = \dfrac{xy' - yx'}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ S' = \dfrac{x''x' + y''y' + z''z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, & X' = \dfrac{y'z'' - z'y''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad Y' = \dfrac{z'x'' - x'z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad Z' = \dfrac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ S'' = \dfrac{xx'' + yy'' + zz''}{x^2 + y^2 + z^2}, & X'' = \dfrac{yz'' - zy''}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Y'' = \dfrac{zx'' - xz''}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Z'' = \dfrac{xy'' - yx''}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

De ces équations on tire d'abord

$$(9)\quad x' = \lambda(YZ' - ZY'), \quad y' = \lambda(ZX' - XZ'), \quad z' = \lambda(XY' - YX'),$$

où λ est un paramètre arbitraire; et l'on trouve ensuite, T désignant le tenseur $\sqrt{S^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}$,

$$(10)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{T^2}[(YZ' - ZY')S - (XX' + YY' + ZZ')X + (X^2 + Y^2 + Z^2)X'], \\ y = \dfrac{\lambda}{T^2}[(ZX' - XZ')S - (XX' + YY' + ZZ')Y + (X^2 + Y^2 + Z^2)Y'], \\ z = \dfrac{\lambda}{T^2}[(XY' - YX')S - (XX' + YY' + ZZ')Z + (X^2 + Y^2 + Z^2)Z'], \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} x'' = \lambda[(YZ' - ZY')S' + (XX' + YY' + ZZ')X' - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)X], \\ y'' = \lambda[(ZX' - XZ')S' + (XX' + YY' + ZZ')Y' - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)Y], \\ z'' = \lambda[(XY' - YX')S' + (XX' + YY' + ZZ')Z' - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)Z], \end{cases}$$

Formules de multiplication.

Il est alors aisé de calculer S'', X'', Y'', Z'' en transportant dans les quatre dernières formules (8) les valeurs précédentes de x, y, z,

x', y', z'. On trouve

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{S}' &= SS' - XX' - YY' - ZZ', \\ \mathbf{X}' &= XS' + SX' - YZ' + ZY', \\ \mathbf{Y}' &= YS' + SY' - ZX' + XZ', \\ \mathbf{Z}' &= ZS' + SZ' - XY' + YX'. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules qui traduisent, à l'aide des paramètres S, X, Y, Z, la multiplication de la bi-radiale R par la bi-radiale R′ [1].

Distributivité de la multiplication vis-à-vis de l'addition.

Il est clair que si $S, X, Y, Z, S_1, X_1, Y_1, Z_1$ sont les paramètres numériques de deux bi-radiales, $S + S_1$, $X + X_1$, $Y + Y_1$, $Z + Z_1$ sont les paramètres de la bi-radiale qui est la somme de ces deux-là. Comme, d'autre part, les formules (12) qui traduisent la multiplication sont linéaires et homogènes par rapport aux paramètres de la bi-radiale multiplicande et par rapport aux paramètres de la bi-radiale multiplicateur, on peut en conclure que la multiplication des bi-radiales est *distributive* à l'égard de l'addition. C'est-à-dire que pour multiplier la somme $R + R_1$ de deux bi-radiales par une autre R', on peut effectuer séparément les constructions $R'.R$ et $R'.R_1$ et faire l'addition du résultat. Pareillement pour multiplier R' par $(R + R_1)$, on pourra multiplier R' par R, puis R' par R_1 et additionner les résultats. Il faut bien prendre garde dans ces opérations de ne pas intervertir l'ordre des facteurs.

Application de la multiplication de deux sommes.

Ainsi, prenons la bi-radiale R décomposée en sa bi-radiale scalaire R_s et ses trois bi-radiales rectangulaires R_x, R_y, R_z, on a

$$R = R_s + R_x + R_y + R_z.$$

De même pour une seconde bi-radiale R' on aura

$$R' = R'_s + R'_x + R'_y + R'_z.$$

---

(1) Ces formules fournissent la démonstration de ce fait que le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés. On sait, en effet, que

$$\sqrt{\mathbf{S}'^2+\mathbf{X}'^2+\mathbf{Y}'^2+\mathbf{Z}'^2} = \sqrt{S^2+X^2+Y^2+Z^2}\,\sqrt{S'^2+X'^2+Y'^2+Z'^2}.$$

Car le tenseur du produit est le produit des tenseurs. On a donc

$$\begin{aligned}(S^2+X^2+Y^2+Z^2)&(S'^2+X'^2+Y'^2+Z'^2)\\ &=(SS'-XX'-YY'-ZZ')^2+(XS'+SX'-YZ'+ZY')^2\\ &\quad+(YS'+SY'-ZX'+XZ')^2+(ZS'+SZ'-XY'+YX')^2.\end{aligned}$$

Pour faire le produit R' R on pourra écrire

$$\begin{aligned} R'R = {} & R'_s.R_s + R'_s.R_x + R'_x.R_s \\ & + R'_s.R_y + R'_y.R_s \\ & + R'_s.R_z + R'_z.R_s \\ & + R'_x R_x + R'_y R_z + R'_z R_y \\ & + R'_y R_y + R'_z R_x + R'_x R_z \\ & + R'_z R_z + R'_x R_y + R'_y R_x. \end{aligned}$$

Il s'agit d'évaluer chacune des bi-radiales qui figurent en produits partiels.

D'abord $R'_s R_s$ est une bi-radiale scalaire représentée par le nombre S.S', en conservant les notations précédentes.

Rappelons-nous que R_x, R_y, R_z sont les produits des verseurs r_x, r_y, r_z par X, Y, Z et R'_x, R'_y, R'_z les produits par X', Y', Z' des mêmes verseurs.

Cela posé, $R'_s . R_x$, c'est-à-dire le produit par une bi-radiale scalaire de la bi-radiale R_x, est une bi-radiale que l'on obtient évidemment en multipliant r_x par S'. X ; on peut donc poser

$$R'_s R_x = S' X . r_x,$$

et de même

$$R'_x . R_s = SX' . r_x,$$

$$R'_s R_y = S' Y . r_y, \quad R'_y . R_s = SY' . r_y,$$

$$R'_s R_z = S' Z . r_z, \quad R'_z . R_s = SZ' . r_z.$$

Le produit $R'_x R_x$ est égal au produit par XX' du carré r_x^2 du verseur r_x^2; or, ce carré est une bi-radiale scalaire représentée par — 1. En conséquence, $R'_x R_x$ est une bi-radiale scalaire représentée par — XX'.

Semblablement, $R'_y R_y$, $R'_z R_z$ sont des bi-radiales scalaires représentées par — YY', — ZZ. Si donc nous groupons dans la somme totale, et comme c'est permis, les quatre bi-radiales scalaires déjà trouvées, nous trouvons déjà dans R' R une partie scalaire représentée par le nombre

$$SS' - XX' - YY' - ZZ'.$$

Restent les termes tels que $R'_y R_z$. Ce produit est égal au produit par Y' Z du produit des verseurs $r_y r_z$, lequel est égal à r_x. Par contre, $R'_z R_y$ donnerait le produit par Z' Y de $r_z r_y$, qui est égal à — r_x, on voit donc que le groupe $R'_y R_z + R'_z R_y$ fournit le produit par (ZY' — YZ') du verseur r_x; on trouverait de même qu'on a

$$R'_z R_x + R'_x R_z = (XZ' - ZX')\, r_y,$$

$$R'_x R_y + R'_y R_x = (YX' - XY')\, r_z.$$

Si l'on groupe alors toutes les bi-radiales qui dérivent d'un même verseur r_x, r_y, r_z par multiplication par un nombre, on arrive à la conclusion suivante :

Le produit R' R admet une partie scalaire mesurée par le nombre

$$S'' = SS' - XX' - YY' - ZZ'$$

et se compose, en outre, de trois bi-radiales rectangles que l'on obtient en multipliant les verseurs r_x, r_y, r_z par les nombres X'', Y'', Z'' suivants :

$$\begin{aligned} X'' &= SX' + S'X - YZ' + ZY', \\ Y'' &= SY' + S'Y - ZX' + XZ', \\ Z'' &= SZ' + S'Z - XY' + YX'. \end{aligned}$$

On retrouve les formules (12) par une autre voie.

Nous retombons, comme ce devait être, sur les formules déjà trouvées, mais nous y retombons par une voie *qui n'est autre cette fois qu'un véritable calcul symbolique* et nous aboutissons ainsi naturellement à la conception même des *quaternions*.

Quaternion.

Le quaternion c'est l'image analytique de la bi-radiale.

Considérons un symbole de la forme

$$s + i.x + j.y + k.z,$$

où s, x, y, z sont des nombres algébriques ordinaires et i, j, k de simples symboles de séparation. Nous conviendrons que deux symboles de cette forme ne pourront être identiques que si s, x, y, z y ont la même valeur.

Somme et différence de quaternions.

Étant donné un second symbole

$$s' + i.x' + j.y' + k.z',$$

nous appellerons sommes de ces symboles le symbole

$$s + s' + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z')$$

et différence le symbole

$$s - s' + i(x - x') + j(y - y') + k(z - z').$$

Pour multiplier le symbole par un nombre algébrique, on multipliera s, x, y, z par ce nombre.

Multiplication.

Cherchons actuellement à définir la multiplication des symboles de cette sorte en conservant une partie au moins des règles du calcul de l'algèbre ordinaire. Formons le produit

$$(s' + ix' + j.y' + kz')(s + ix + jy + kz)$$

en procédant, pour la loi de formation, comme si i, j, k étaient trois variables littérales indépendantes, et ayant soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs, les quantités s', x', y', z', s, x, y, z jouant, elles, le rôle de coefficients numériques et étant, par conséquent, intervertissables. Le développement du produit nous donnera, en groupant les termes qui multiplient un même symbole,

$$\begin{aligned} s's &+ (s'x + sx')\,i + (s'y + sy')\,j + (s'z + sz')\,k \\ &+ xx'.i^2 + yy'.j^2 + zz'.k^2 \\ &+ y'z.jk + z'y.kj \\ &+ z'x.ki + x'z.ik \\ &+ x'y.ij + y'x.ji. \end{aligned}$$

Une des conditions essentielles de ce calcul, c'est que les opérations ne conduisent pas à des symboles autres que ceux introduits dès le début. Ce produit doit être réductible au type

$$s'' + i.x'' + jy'' + kz''.$$

Relations fondamentales.

Il faudra pour cela que i^2, j^2, k^2, jk, kj, ki, ik, ij, ji soient des fonctions linéaires à coefficients numériques des symboles i, j, k.

Choix particulier.

Prenons dès lors pour ces fonctions linéaires les suivantes :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} i^2 = -1, & j^2 = -1, & k^2 = -1, \\ jk = i, & kj = -i, & \\ ki = j, & ik = -j, & \\ ij = k. & ji = -k, & \end{array} \right.$$

on aura

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} s'' = ss' - xx' - yy' - zz', \\ x'' = sx' + s'x + zy' - yz', \\ y'' = sy' + s'y + xz' - zx', \\ z'' = sz' + s'z + yx' - xy'. \end{array} \right.$$

En comparant aux formules (12), on voit que l'on a créé ainsi un algorithme qui, tant par ses propriétés d'addition que par la composition de sa multiplication, est la complète image des constructions géométriques concrètes auxquelles nous avaient amené la considération des bi-radiales.

La conception analytique peut même être généralisée et étendue au cas où, au lieu des quatre *systèmes d'unités* 1, i, j, k, on en prendrait un plus grand nombre.

Représentation de toute rotation par un verseur.

Après cet exposé sommaire des premiers principes des quaternions, nous allons voir quels rapports existent entre cette théorie et celle des rotations.

Dans la note II qu'il a insérée dans le présent volume, M. Darboux a montré (p. 346 et suivantes) que toute rotation d'amplitude θ autour d'un axe $O\lambda$ se représente par un angle AOB dont l'ouverture est $\frac{1}{2}\theta$. Il semblerait naturel de représenter la rotation par un verseur d'axe $O\lambda$ et d'amplitude angulaire θ; *il vaut mieux la représenter par le verseur d'axe $O\lambda$ et d'amplitude $\frac{\theta}{2}$.*

Ce verseur sera ainsi représentable par la notation $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$, où $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ont chacun une longueur égale à l'unité. L'indétermination de l'angle AOB dans son plan que M. Darboux établit à l'endroit cité, correspond à l'indétermination analogue dans le cas des verseurs.

La composition des rotations finies se ramène à la multiplication des verseurs.

Considérons deux rotations qu'on pourra ramener à être représentées par les angles AOB et BOC (voir p. 348, n° 4); les verseurs représentatifs correspondants seront $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}\right)$.

Or, dans cette disposition, l'angle AOC représente la rotation R″ qui résulte des rotations R, R′ effectuées l'une après l'autre

$$R'' = R'R.$$

Le verseur représentatif est $\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\right)$; c'est le produit des deux premiers. Ainsi, *avec ce mode de représentation, la multiplication des verseurs correspond à la composition des rotations finies.*

Les paramètres du verseur qui représentent la rotation sont les variables d'Olinde Rodrigues.

Il est curieux que les paramètres d'Olinde Rodrigues soient précisément ceux du verseur représentatif de la rotation.

Soient, en effet, α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation et θ l'amplitude de la rotation. Le verseur qui la représente a le même axe et son amplitude angulaire est $\frac{\theta}{2}$. Sa partie scalaire est

$$r = \cos\frac{\theta}{2},$$

tandis que les projections de son vecteur sont

$$l = \alpha \sin\frac{\theta}{2}, \quad m = \beta \sin\frac{\theta}{2}, \quad n = \gamma \sin\frac{\theta}{2}.$$

Il suffit de se reporter aux formules (3) et (6) de la note I de M. Darboux pour constater que l, m, n, r sont les variables d'Olinde

Rodrigues où l'on aurait profité de l'homogénéité pour faire en sorte que

$$l^2 + m^2 + n^2 + r^2 = 1.$$

Raison de l'identité de la composition des rotations en paramètres d'Olinde Rodrigues avec les formules de la multiplication des quaternions.

Il est dès lors facile de prévoir quelles seront les formules qui, au moyen des paramètres d'Olinde Rodrigues, expriment la composition de deux rotations (r, l, m, n) $(r'\ l', m', n')$. Si (r'', l'', m'', n'') sont les paramètres de la rotation composante, ces paramètres s'exprimeront en fonction des anciens par les formules de la multiplication des verseurs

$$\begin{aligned} r'' &= rr' - ll' - mm' - nn', \\ l'' &= rl' + r'l + m'n - nm', \\ m'' &= rm' + r'm + n'l - ln', \\ n'' &= rn' + r'n + l'm - ml'. \end{aligned}$$

La théorie des renversements comme base de la doctrine des quaternions.

On voit que la théorie des renversements fournit une nouvelle interprétation de celle des verseurs.

Une droite OA représente, en effet, un renversement, et une droite OB en représente un autre; la bi-radiale $\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)$ représente le résultat de ces deux renversements effectués successivement, et par suite représente non plus un quotient, mais le produit de ces deux renversements. La composition des renversements autour d'axes issus d'un point devient ainsi le point de départ de la théorie des verseurs et de leur multiplication.

NOTE XI

Sur les représentations graphiques.

Représentation graphique de la variation d'une fonction du temps.

L'étude des phénomènes physiques conduit souvent à observer la variation avec le temps de certaines données expérimentales. Pour se représenter la loi de cette variation, on a recours à des procédés graphiques.

Sur un axe Ox on porte un segment qui représente, à une certaine échelle, le temps écoulé; en sorte que si T est la longueur qui représente l'unité de temps et t le nombre qui mesure le temps écoulé, la longueur portée sur l'axe Ox est égale à $x = t.T$.

De même, sur un axe Oy perpendiculaire à Ox, on porte un segment qui représente à une certaine échelle la valeur actuelle d'une quantité variable et mesurée par un certain nombre u; si U est la longueur qui représente l'unité, le segment porté par Oy a pour longueur $y = u.U$.

Diagramme.

On marque le point M dont x, y sont les coordonnées; lorsque le temps s'écoule, le point M décrit dans le plan une courbe appelée *diagramme* dont la forme donne une image sensible de la variation de la quantité mesurée par le nombre u.

Si une portion du diagramme se compose d'une parallèle à Ox, c'est que, pendant un certain laps de temps, la quantité en question aura conservé la même valeur. Si, au contraire, une portion du diagramme est un segment parallèle à Oy, la quantité dont on étudie la variation aura subi une variation brusque. Cette circonstance ne peut donc se présenter que dans des cas exceptionnels. Si la quantité mesurée par u est un espace, il ne saurait y avoir variation brusque. Il en serait autrement si u est la mesure d'une force ou d'une vitesse. La théorie des chocs et des percussions admet, en effet, des variations brusques de forces ou de vitesses, malgré qu'en

réalité il ne puisse s'agir que de variations très rapides en des temps très petits, mais finis. La courbe diagramme comporte alors une branche qui se confond sensiblement avec une parallèle à Oy.

Si la quantité mesurée par u varie d'une manière uniforme pendant un certain laps de temps, le diagramme comportera un segment rectiligne oblique sur les axes de coordonnées et réciproquement; dans ce cas, en effet, u est lié à t par l'équation

$$u = at + b,$$

qui donne, en remplaçant u par $\frac{y}{U}$ et t par $\frac{x}{T}$,

$$\frac{y}{U} = \frac{a}{T} x + b,$$

équation d'une droite.

Si la quantité u subit une loi de variation définie par la formule

$$u = \frac{1}{2} a t^2 + bt + c,$$

ainsi que cela a lieu si u représente l'espace dans un mouvement uniformément varié, la courbe diagramme est une parabole dont la concavité est tournée vers les y positifs ou vers les y négatifs, suivant que a est lui-même positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que le mouvement est accéléré ou retardé.

Si u subit des variations périodiques, le diagramme aura une forme sinusoïdale; il se reproduira lui-même de période en période. Si la quantité u subit, en outre d'une variation périodique, des variations périodiques secondaires de périodes moindres et d'amplitudes plus petites, le tracé sinusoïdal ci-dessus deviendra la ligne moyenne d'une ligne dentelée dont la dentelure correspond justement aux périodes secondaires.

Toutes ces circonstances se présentent dans la pratique, et le tracé graphique suffit pour mettre en évidence d'un seul coup ces diverses affections de la quantité u beaucoup mieux que ne le pourraient faire un tableau numérique ou une fonction de forme compliquée.

Représentation de la vitesse.

Si l'on connaît la relation analytique existante entre t et u, la dérivée $\frac{du}{dt}$, dont on admet l'existence, donne la vitesse de variation de la quantité u. Si θ est l'angle que fait avec Ox la tangente à la courbe diagramme au point M, on a, comme on sait,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{U}{T} \frac{du}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{du}{dt} = \frac{T}{U} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

La tangente à la courbe diagramme fournit ainsi une représentation de la vitesse.

Si $T = U$, c'est-à-dire si les deux unités sont représentées par la même longueur, $\operatorname{tg} \theta$ représente exactement cette vitesse. Mais, dans beaucoup de circonstances, il y aurait inconvénient à adopter la même échelle pour le temps et pour la quantité étudiée; en sorte que $\frac{T}{U}$ n'est pas toujours égal à 1.

La quantité $v = \frac{du}{dt}$ est elle-même une variable pour laquelle on peut construire un diagramme, qui porte alors le nom de diagramme des vitesses.

Construction des diagrammes. — Tracé par points.

Pour construire un diagramme, on procède le plus souvent par points. On détermine par le calcul si la quantité u est une fonction connue de t, par l'expérience si u est le résultat d'une mesure expérimentale, les valeurs de u qui correspondent aux valeurs de t se succédant par intervalles aussi rapprochés que possible. On réunit ensuite par un trait continu les points ainsi obtenus. L'exactitude de ce procédé n'est que relative. Il suppose, en effet, la certitude qu'entre deux points consécutifs la courbe n'offre aucune singularité et qu'elle ne subit aucune oscillation qui serait de nature à rompre l'allure de la courbe telle qu'elle résulte des points construits.

Si, par exemple, on ne calcule $\sin x$ que pour des valeurs de x allant de 2π en 2π, on sera tenté de représenter la fonction par une droite, car la forme sinusoïdale n'est pas indiquée par les points construits.

Lorsque la courbe que l'on se propose de tracer représente une fonction connue, la discussion attentive de cette fonction permet d'échapper aux difficultés de cet ordre.

Mais lorsqu'il s'agit de relier par un tracé les points qui résultent de mesures expérimentales, c'est à des considérations d'un autre ordre, d'ordre physique, qu'il faut demander la certitude. La continuité du phénomène, l'absence prévue de maximum ou de minimum entre certaines limites sont autant d'indications dont on doit alors s'autoriser. Dans tous les cas, on sera tenu de rapprocher le plus possible les uns des autres les points construits, et l'on a des exemples où cette précaution, plus scrupuleusement prise, a révélé des

affections qu'avaient laissées insoupçonnées des mesures antérieures trop espacées.

Tracés continus.

Les inconvénients du tracé par point rendent, on le conçoit, particulièrement précieux les tracés continus chaque fois qu'il est possible d'y recourir.

Lorsque la relation a une forme analytique connue, il existe dans certains cas des appareils qui permettent de construire d'une manière continue la courbe diagramme. La droite, le cercle, l'ellipse, la parabole et un grand nombre de courbes peuvent être ainsi décrites par des procédés mécaniques.

D'après le théorème de Kempe, toute courbe algébrique est dans ce cas.

Appareils enregistreurs.

Lorsqu'il s'agit, au contraire, de représenter des données expérimentales, on a recours à des appareils spéciaux qui ont reçu le nom générique d'appareils enregistreurs.

Le plus souvent, c'est un cylindre de révolution tournant uniformément autour de son axe, en sorte que le temps écoulé se mesure sur la circonférence de base de ce cylindre. En face de ce cylindre, un style muni d'encre se meut dans le sens des génératrices; en sorte que son déplacement mesure justement l'amplitude du phénomène que l'on se propose d'étudier. L'extrémité du style trace alors sur le cylindre une courbe continue qui, si l'on vient à développer la surface du cylindre, c'est-à-dire à dérouler la feuille de papier enroulée sur lui, est le diagramme automatiquement tracé qui représente le phénomène. C'est le procédé actuellement employé dans le système télégraphique sous-marin de Thomson, modifié et connu sous le nom de système *recorder*. Dans ce système, la variation de l'intensité du courant est continûment enregistrée; de manière que la réception d'une dépêche consiste dans le tracé d'un diagramme et sa lecture dans l'interprétation de ce diagramme.

Graphiques des chemins de fer.

Nous terminerons cette note par la description succincte des tableaux graphiques employés par les Compagnies de chemins de fer pour figurer la marche des trains.

Sur une ligne horizontale on a distribué les heures de dix minutes en dix minutes pour une journée de minuit à minuit. Par chaque trait de division est menée une ordonnée verticale. Le long de l'ordonnée extrême de gauche on a inscrit les noms des stations que traverse la ligne.

L'intervalle de voie compris entre deux stations consécutives s'appelle une *section*.

Désignons par s_0, s_1, s_2, ..., s_m les stations successives de la ligne

de chemin de fer énumérées dans le sens ascendant et supposons un train parti de s_0 à une heure déterminée, parcourant la voie en s'arrêtant à certaines stations, en brûlant certaines autres et devant arriver à heure fixe à la station terminus s_m.

On peut admettre que la vitesse est uniforme dans chaque section. Il n'en est pas absolument ainsi, non seulement à cause des périodes de mouvement lent qui précèdent et suivent les arrêts, mais aussi parce que la configuration de la voie nécessite des changements de vitesse. Mais, en fait, on peut traiter, sur chaque section, le mouvement des trains comme s'il était uniforme, la vitesse étant égale au quotient de la distance qui sépare les deux stations extrêmes de la section par le temps employé à la parcourir. Cette vitesse moyenne peut d'ailleurs changer et change, en effet, souvent quand on passe d'une section à une autre.

Voici comment, dans ces conditions, un tracé représentera la marche du train :

L'axe horizontal Ox est celui suivant lequel se compte le temps, qui joue ainsi le rôle d'abscisse. L'axe vertical le long duquel se comptent les ordonnées est celui le long duquel se trouvent inscrits à gauche les noms des stations.

La période pendant laquelle le convoi va de s_0 en s_1 se trouvera représentée par un segment de ligne droite qui coupe l'axe Ox au point correspondant à l'heure de départ et qui joint ce point au point de croisement de l'horizontale menée par s_1 et de la verticale qui correspond à l'heure d'arrivée. Si le train s'arrête dix minutes en s_1, cet arrêt sera figuré par un trait horizontal représentant une durée de temps de dix minutes, après quoi le tracé repartira, rectiligne, pour aboutir au point de croisement de l'horizontale du point s_2 avec la verticale correspondante à l'heure d'arrivée à la station s_2. Et ainsi de suite. Le tracé sera ainsi constitué par une ligne polygonale comportant par intervalles de petites parties horizontales qui représentent les périodes d'arrêt.

S'il s'agissait, au contraire, de figurer la marche d'un train parti de s_m et se dirigeant vers s_0, le point de départ du tracé serait, naturellement, sur l'horizontale du point s_m, et son sens de parcours serait de haut en bas du tableau au lieu d'être de bas en haut, comme dans le cas précédent.

Imaginons, d'après cela, que sur un même tableau on ait ainsi représenté la marche des trains réguliers qui parcourent une même ligne dans une journée. A tout instant du jour il sera possible de se rendre compte de l'état actuel de la circulation sur la voie, ce qui est

indispensable, en prévision par exemple d'un arrêt subit de la circulation en un point ou de la nécessité de mettre en route un ou plusieurs trains en dehors des trains réguliers. Il devient alors facile d'assurer le garage des trains à marche lente pour le passage de trains plus rapides, ainsi que le croisement des trains dans les tronçons à voie unique.

Les tableaux graphiques rendent ainsi possible et même facile la résolution de problèmes, qui exigeraient sans cela une longue et minutieuse discussion d'équations de premier degré.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS
DE
CINÉMATIQUE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR GABRIEL KŒNIGS

AVEC DES NOTES

PAR M. G. DARBOUX
MEMBRE DE L'INSTITUT, DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

ET PAR MM.

E. COSSERAT
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE TOULOUSE

F. COSSERAT
INGÉNIEUR PRINCIPAL A LA COMPAGNIE
DES CHEMINS DE FER DE L'EST

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
8 — rue de la Sorbonne — 8

1897

